



Cálculo 1 (MTM3101 e MTM3110)

Lista 1.8 - Limites no infinito

Última atualização: 10 de maio de 2022.

Exercícios Principais

P1. Calcule, se existirem, os limites abaixo.

- | | | |
|--|--|---|
| (a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + x).$ | (b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - x).$ | (c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 3x^2 - x + 1}{2x^3 - x + 7}.$ |
| (d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^3 + x) \ln x.$ | (e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^3 + 4x^2 - 1).$ | (f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^4 + x^5).$ |
| (g) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 - \frac{1}{x} + \frac{4}{x^2}\right).$ | (h) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 1}{x^2 + 1}.$ | (i) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + 1}{x^2 + 1}.$ |
| (j) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 2x + 3}{2x^2 + 5x - 3}.$ | (k) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^5 - 3x^3 + 2}{-x^2 + 7}.$ | (l) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^5 - x^2 + 7}{2 - x^2}.$ |
| (m) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-5x^3 + 2}{7x^3 + 3}.$ | (n) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{x} + 3x - 10}{x^3}.$ | (o) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x}.$ |
| (p) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(2x - 7 \cos x)}{3x^2 - 5 \sin x + 1}.$ | (q) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x + 1}.$ | (r) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x + 1}.$ |
| (s) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1}).$ | (t) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x^2 - 1} - x)$ | (u) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2x^2 - 7}}{x + 3}.$ |

P2. Determine a sabendo que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + ax} - \sqrt{x^2 + 12x}) = 2.$$

Exercícios Complementares

C1. Calcule, se existir, o limite $\lim_{x \rightarrow 0^+} \arctg(\ln x).$

C2. Sejam $f(x)$ e $g(x)$ funções polinomiais. Baseado nos exercícios já resolvidos, formule um teorema que indique o resultado dos limites $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{g(x)}.$

C3. As definições limites no infinito possuem versões formais semelhantes às que vimos para o limite usual. Tente formular uma definição precisa para todos os tipos de limites no infinito e depois pesquise se sua definição está correta.

C4. Mostre que toda função polinomial de grau ímpar possui pelo menos uma raiz real. Ao final de sua demonstração, explique por que o mesmo argumento não funciona para funções polinomiais de grau par. *Sugestão.* Seja f uma função polinomial de grau ímpar. Utilize seus conhecimentos

de limite para mostrar que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ ou que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$. Com esse resultado, utilize o significado de limite para concluir a existência de $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$. Por fim, aplique um teorema visto nas aulas para concluir o resultado.



Cálculo 1 (MTM3101 e MTM3110)

Gabarito da Lista 1.8

Limites no infinito

Última atualização: 10 de maio de 2022.

Exercícios Principais

P1.

- (a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + x) = \infty^2 + \infty = \infty + \infty = \infty$.
- (b) Se tentarmos resolver como no item anterior, esbarramos em uma expressão não permitida: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + x) = \infty^2 - \infty = \infty - \infty$. Isso quer dizer que esta solução não funciona e devemos procurar um outro método. Normalmente, estes outros métodos são obtidos reescrevendo a expressão de uma forma que, ao substituir x por ∞ , nenhuma expressão proibida aparece. Neste exemplo, escrevamos $x^2 - x = x(x - 1)$. Nessa nova escrita fica possível calcular sem obter expressões proibidas:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x(x - 1) = \infty(\infty - 1) = \infty \cdot \infty = \infty.$$

- (c) Se tentarmos substituir diretamente, teremos expressões proibidas. Apesar de pouco comum, a reescrita mais útil para resolver esse limite é, em cada polinômio, colocar a potência de maior grau em evidência:

$$x^3 - 3x^2 - x + 1 = x^3 \left(1 - \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right) \quad \text{e} \quad 2x^3 - x + 7 = x^3 \left(2 - \frac{1}{x^2} + \frac{7}{x^3} \right).$$

Substituindo a expressão original por essas reescritas, obtemos

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 3x^2 - x + 1}{2x^3 - x + 7} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 \left(1 - \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right)}{x^3 \left(2 - \frac{1}{x^2} + \frac{7}{x^3} \right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 - \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}}{2 - \frac{1}{x^2} + \frac{7}{x^3}} = \\ &= \frac{1 - \frac{3}{-\infty} - \frac{1}{(-\infty)^2} + \frac{1}{(-\infty)^3}}{2 - \frac{1}{(-\infty)^2} + \frac{7}{(-\infty)^3}} = \frac{1 - \frac{3}{-\infty} - \frac{1}{\infty} + \frac{1}{-\infty}}{2 - \frac{1}{\infty} + \frac{7}{-\infty}} = \frac{1 - 0 - 0 + 0}{2 - 0 + 0} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

- (d) $+\infty$.
(e) $+\infty$.
(f) $-\infty$.
(g) 2.
(h) 0.
(i) 0.
(j) $1/2$.

- (k) $-\infty$.
- (l) $+\infty$.
- (m) $-5/7$.
- (n) 0.
- (o) 0.
- (p) $2/3$.
- (q) 1.
- (r) -1 .
- (s) 0.
- (t) $-1/2$.
- (u) $\sqrt{2}$.

P2. $a = 16$.

Exercícios Complementares

C1. $-\pi/2$

C2. Se f e g são polinômios de mesmo grau, então ambos os limites têm como resultado a divisão entre os coeficientes dos termos de maior grau dos polinômios. Se o grau de g é maior que o grau de f , então ambos os limites são iguais a 0. Se o grau de f é maior que o grau de g , então ambos os limites terão como resultado $-\infty$ ou $+\infty$. Os sinais serão determinados pelos sinais dos coeficientes dos termos de maior grau de cada polinômio e também pela paridade da diferença dos graus de f e g .

C3. **Definição (limite no infinito).** Seja f uma função tal que existe $R > 0$ de modo que $(R, \infty) \subset \text{Dom}(f)$ e seja $L \in \mathbb{R}$. Dizemos que o limite da função f no infinito pela direita é L se, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N > 0$ tal que, para todo x que satisfaz $x > N$, $|f(x) - L| < \varepsilon$. Notação: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$.

Definição (limite infinito no infinito). Seja f uma função tal que existe $R > 0$ de modo que $(R, \infty) \subset \text{Dom}(f)$. Dizemos que o limite da função f no infinito pela direita é ∞ se, $\forall M > 0$, $\exists N > 0$ tal que, para todo x que satisfaz $x > N$, $f(x) > M$. Notação: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$.

Os outros casos $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ possuem definições similares.

C4. Se f é uma função polinomial de grau ímpar, podemos escrever f na forma

$$f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n,$$

onde $a_n \neq 0$ e n é um inteiro positivo ímpar. Assumimos que $a_n > 0$. Assim, obtemos

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^n \left(\frac{a_0}{x^n} + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{x} + a_n \right) = +\infty \cdot a_n = +\infty,$$

já que $a_n > 0$. De maneira análoga, obtemos $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, pois, como n é ímpar, temos $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = -\infty$.

Como $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$, deve existir $b \in \mathbb{R}$ para o qual $f(b) > 0$ (pela definição de limite infinito no infinito). Do mesmo modo, deve existir $a \in \mathbb{R}$ para o qual $f(a) < 0$, pois $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$. Portanto, como a função f é contínua em $\mathbb{R}$ (pois é uma função polinomial) segue do Teorema do Anulamento (ou do Teorema do Valor Intermediário) que existe um $c \in \mathbb{R}$ entre a e b tal que $f(c) = 0$, isto é, c é uma raiz real de f .

No caso em que $a_n < 0$, a ideia da prova é a mesma, só notando que $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$.

Para funções de grau par, o resultado não é válido (note que $f(x) = x^2 + 1$, por exemplo, não possui raízes reais). O mesmo argumento não pode ser usado pois para grau par, ou temos

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty,$$

e não podemos garantir que existam $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$.