Universidade Federal de Santa Catarina
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas
Departamento de Matemática

Cálculo 1 (MTM3101 e MTM3110)

Lista 1.10 - Limites fundamentais

Última atualização: 10 de maio de 2022.

Exercícios Principais

P1. Calcule os limites abaixo.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{(2x^2+3)\operatorname{sen}x}{x^2+2x}$.
(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(5x)}{x}$.
(c) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{(2x^2+3)\operatorname{sen}(5x)}{x^2+2x}$.

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$.
(e) $\displaystyle\lim_{x\to \pi}\frac{\operatorname{sen}x}{x-\pi}$.
(f) $\displaystyle\lim_{x\to 3}\frac{2^x-8}{x-3}$.

(g) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{3^{\frac{2x-4}{5}}-1}{\operatorname{sen}[4(x-2)]}$.
(h) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x}{x}$.
(i) $\displaystyle\lim_{x\to -1}\frac{\operatorname{tg}^3\left(\frac{x+1}{4}\right)}{(x+1)^3}$.

(j) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{6x-\operatorname{sen}(2x)}{2x+3\operatorname{sen}(4x)}$.
(k) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos(2x)-\cos(3x)}{x^2}$.
(l) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{sen}x}{x+\operatorname{sen}x}$.

(m) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{2^x-3^x}{x}$.
(n) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{e^{x-1}-2^{x-1}}{x^2-1}$.
(o) $\displaystyle\lim_{x\to -3}\frac{4^{\frac{x+3}{5}}-1}{x+3}$.

(p) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x}-e^{-2x}}{x}$.
(q) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\left(1+\tfrac{10}{x}\right)^x$.
(r) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}$.

Exercícios Complementares

C1. Calcule os limites abaixo.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(ax)}{x}$.
(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(10x)}{\operatorname{tg}(7x)}$.
(c) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}$.

(d) $\displaystyle\lim_{x\to \infty}\left(1+\tfrac{1}{x}\right)^{5x}$.
(e) $\displaystyle\lim_{x\to \infty}\left(1+\tfrac{5}{x}\right)^{x}$.
(f) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{10^{x-2}-1}{x-2}$.

(g) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{senh}x}{x}$.
(h) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{5x}-e^{3x}}{\operatorname{sen}(5x)-\operatorname{sen}(3x)}$.
(i) $\displaystyle\lim_{x\to 3\pi/2}(1+\cos x)^{1/\cos x}$.

(j) $\displaystyle\lim_{x\to \infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$.

C2. Calcule os limites abaixo. *Observação.* Não há conteúdo novo nesse exercício, são limites dos tipos já estudados todos misturados.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+13}-4}{x^2-9}$.
(b) $\displaystyle\lim_{x\to \infty}\left(\frac{x-1}{x}\right)^{x}$.

(c) $\displaystyle\lim_{x\to -1}\frac{x^3+x^2-x-1}{x^3-x^2-5x-3}$.
(d) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty}\frac{-4x^2-x-5}{3x^2+4x+1}$.

(e) $\displaystyle\lim_{x\to -1} \frac{2x+2+3\,\mathrm{sen}(4x+4)}{x^2+x}$.

(f) $\displaystyle\lim_{x\to 2^-} \frac{2x-5}{x^2-4x+4}$.

(g) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}$.

(h) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x\cos(3x)}{2x^2+\mathrm{sen}(x+\pi/2)}$.

(i) $\displaystyle\lim_{x\to 4} \frac{\log_2 x - 2}{x-4}$.

(j) $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} \frac{x^2-3}{x^3-x+1}$.

Universidade Federal de Santa Catarina
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas
Departamento de Matemática

Cálculo 1 (MTM3101 e MTM3110)

Gabarito da Lista 1.10

Limites fundamentais

Última atualização: 10 de maio de 2022.

Exercícios Principais

P1.

(a) Primeiramente, devemos perceber que apesar de a função ser contínua, 0 não está no domínio, indicando que não basta só substituir. Após isso, percebemos que a substituição leva ao caso 0/0, mostrando que devemos procurar métodos alternativos para resolver. A terceira percepção aqui é que este é um caso 0/0 e que envolve funções trigonométricas. Não é uma regra geral, mas esta última percepção é um bom indicativo de que será necessário usar o primeiro limite fundamental na solução. Visto isso, devemos procurar uma reescrita da função (ou alguma mudança de variável) para fazer aparecer exatamente o limite fundamental. Observemos que

$$\frac{(2x^2+3x)\operatorname{sen} x}{x^2+x} = \frac{2x^2+3}{x+2} \cdot \frac{\operatorname{sen} x}{x},$$

isto é, escrevemos nossa função como produto de outras duas. De cada uma dessas duas em separado, nós sabemos o limite no ponto 0 (a primeira por ser contínua no 0 e a segunda pelo limite fundamental) e, portanto, segue da propriedade de que o limite do produto é o produto dos limites (lembre que a propriedade só vale quando os limites existem) que

$$\lim_{x\to 0} \frac{(2x^2+3)\operatorname{sen} x}{x^2+2x} = \lim_{x\to 0} \frac{2x^2+3}{x+2} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \frac{3}{2} \cdot 1 = \frac{3}{2}.$$

(b) Como anteriormente, percebemos que estamos numa situação de 0/0 envolvendo trigonometria, dando fortes indícios de que teremos que usar o limite fundamental. Um possível caminho seria usar as fórmulas trigonométricas para escrever $\operatorname{sen}(5x)$ em termos de $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$, mas isso daria um trabalho considerável (e que seria impraticável fazer na mão se fosse $\operatorname{sen}(100x)$, por exemplo). A abordagem correta aqui é reescrever esse limite em uma nova variável focando em fazer aparecer exatamente o limite fundamental. Façamos a substituição $y = 5x$. Perceba que, $x = y/5$ e que, quando $x \to 0$, então $y \to 0$. Assim,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(5x)}{x} = \lim_{y\to 0} \frac{\operatorname{sen} y}{y/5} = \lim_{y\to 0} 5 \cdot \frac{\operatorname{sen} y}{y} = 5 \cdot \lim_{y\to 0} \frac{\operatorname{sen} y}{y} = 5.$$

(c) Usando um processo análogo ao item (a) e aproveitando o resultado do limite do exemplo 2, obtemos

$$\lim_{x\to 0} \frac{(2x^2+3)\operatorname{sen}(5x)}{x^2+2x} = \lim_{x\to 0} \frac{2x^2+3}{x+2} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(5x)}{x} = \frac{3}{2} \cdot 5 = \frac{15}{2}.$$

É importante perceber aqui que, à medida que vamos calculando limites mais simples, conseguimos resolver outros mais complexos nos aproveitando desses resultados simples (como se os previamente resolvidos fossem um kit de ferramentas à disposição). Por outro lado, também é importante perceber que uma das formas de atacar um limite complicado é, às vezes, separá-lo em limites menores e resolver cada um deles separadamente.

(d) Como nos itens acima, estamos no caso 0/0 envolvendo trigonometria. Temos que, de alguma forma, fazer aparecer o limite fundamental. Aqui entra o conhecimento de formas de manipulação algébrica e também das identidades trigonométricas (e um pouco de criatividade e muito treino). Observe:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2(1+\cos x)} =$$

$$\lim_{x\to 0}\left[\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^2\cdot\frac{1}{1+\cos x}\right] = \left(\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos x} = 1^2\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

(e) Como nos itens acima, estamos no caso 0/0 envolvendo trigonometria. Porém, neste caso, nossa variável não está tendendo a 0. Isso diz que a única forma de fazermos aparecer o limite fundamental é com uma mudança de variável. Com a mudança $y = x-\pi$, temos que $x = y+\pi$ e que $y \to 0$. Assim,

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\operatorname{sen} x}{x-\pi} = \lim_{y\to 0}\frac{\operatorname{sen}(y+\pi)}{y} = \lim_{y\to 0}\frac{\operatorname{sen} y\cos\pi+\cos y\operatorname{sen}\pi}{y} = \lim_{y\to 0}-\frac{\operatorname{sen} y}{y} = -1.$$

(f) Como antes, estamos numa situação de 0/0. Como há funções exponenciais, provavelmente será necessário usar o segundo limite fundamental. Fazendo a mudança $y = x-3$, obtemos

$$\lim_{x\to 3}\frac{2^x-8}{x-3} = \lim_{y\to 0}\frac{2^{y+3}-8}{y} = \lim_{y\to 0}\frac{8(2^y-1)}{y} = 8\cdot\lim_{y\to 0}\frac{2^y-1}{y} = 8\ln 2.$$

(g) Observemos que estamos no caso 0/0 e que também há funções exponenciais e trigonométricas. Assim, é bem provável que tenhamos que usar os dois limites fundamentais. Para isso, o melhor a fazer é separar em dois limites que têm possibilidades de serem resolvidos por cada um dos limites fundamentais:

$$\frac{3^{\frac{2x-4}{5}}-1}{\operatorname{sen}[4(x-2)]} = \frac{3^{\frac{2x-4}{5}}-1}{x-2}\cdot\frac{x-2}{\operatorname{sen}[4(x-2)]}.$$

Usando mudanças de variável coerentes, concluímos que (faça as contas e verifique os resultados abaixo)

$$\lim_{x\to 2}\frac{3^{\frac{2x-4}{5}}-1}{x-2} = \frac{2\ln 3}{5} \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 2}\frac{x-2}{\operatorname{sen}[4(x-2)]} = \frac{1}{4}.$$

Portanto,

$$\lim_{x\to 2}\frac{3^{\frac{2x-4}{5}}-1}{\operatorname{sen}[4(x-2)]} = \lim_{x\to 2}\frac{3^{\frac{2x-4}{5}}-1}{x-2}\cdot\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{\operatorname{sen}[4(x-2)]} = \frac{2\ln 3}{5}\cdot\frac{1}{4} = \frac{\ln 3}{10}.$$

(h) 1.

(i) 1/64.

(j) 2/7.

(k) 5/2.

(l) 0.

(m) $\ln(2/3) = \ln 2 - \ln 3$.

(n) $(1-\ln 2)/2$.

(o) $\dfrac{2\ln 2}{5}$.

(p) 1.

(q) e^{10}.

(r) e.

Exercícios Complementares

C1.

(a) a.

(b) $10/7$.

(c) 0.

(d) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{5x} = \lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right]^{5} = \left[\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right]^{5} = e^5$.

(e) Fazendo a mudança de variável $y = x/5$, obtemos que $5/x = y$, $x = 5y$ e $y \to \infty$ quando $x \to \infty$. Assim,

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{x}\right)^{x} = \lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{5y} = e^5.$$

(f) $\ln(10)$.

(g) 1.

(h) 1.

(i) e.

(j) e.

C2.

(a) $1/48$.

(b) $e^{-1} = 1/e$.

(c) $1/2$.

(d) $-4/3$.

(e) -14.

(f) $-\infty$.

(g) $4/3$.

(h) 1.

(i) $\dfrac{1}{4\ln 2}$.

(j) -2.