Universidade Federal de Santa Catarina
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas
Departamento de Matemática

Cálculo 1 (MTM3101 e MTM3110)

Lista 2.1 - Reta tangente e velocidade instantânea

Última atualização: 10 de maio de 2022.

Exercícios Principais

P1. Em cada um dos itens abaixo, determine uma equação para a reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abscissa x_0.

(a) $f(x) = \dfrac{x^2}{4}$, $x_0 = 2$.

(b) $f(x) = x^3 - 2x + 7$, $x_0 = -3$.

(c) $f(x) = x^2 - 1$, $x_0 = 1$.

(d) $f(x) = x^2 - 1$, $x_0 = 0$.

(e) $f(x) = x^2 - 1$, $x_0 = -1$.

(f) $f(x) = x^2 - 1$, $x_0 = 10$.

(g) $f(x) = x^2 - 1$, x_0 qualquer.

(h) $f(x) = 3x + 2$, $x_0 = 5$.

(i) $f(x) = x^5 + x$, $x_0 = 0$.

(j) $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 4$.

(k) $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$, $x_0 = 2$.

(l) $f(x) = e^x$, $x_0 = 2$.

(m) $f(x) = \operatorname{sen} x$, $x_0 = 0$.

(n) $f(x) = \cos x$, $x_0 = 0$.

P2. Para os itens (a), (h), (j), (k) e (m) da questão anterior, faça o gráfico da função e da reta obtida. Verifique que, de fato, a reta obtida se comporta como reta tangente ao gráfico da função.

P3. A posição $s(t)$ (em metros) de um objeto em função do tempo t (em segundos) é dada por $s(t) = t^3 - t + 1$. Determine a posição e a velocidade do objeto no instante $t = 2\,s$.

P4. Determine a reta que é tangente ao gráfico de $f(x) = x^4$ e paralela à reta $y = 4x + 3$.

P5. Determine uma equação para a reta que passa por $(2, 5)$ e tem coeficiente linear igual a 1.

Observação. Se você estiver com dificuldade em fazer esses exercícios, inicie pela lista complementar que trabalha conceitos preliminares.

Exercícios Complementares

C1. Encontre uma equação para a reta que passa pelos pontos $(2, 3)$ e $(3, 5)$.

C2. Determine uma equação para a reta que passa por $(-2, 4)$ e tem coeficiente angular igual a -3.

C3. Qual é o coeficiente angular da reta que passa pelos pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) (assuma que $x_1 \neq x_2$)?

C4. Considere a função $f(x) = \dfrac{x^2}{4}$.

(a) Faça o gráfico de f.

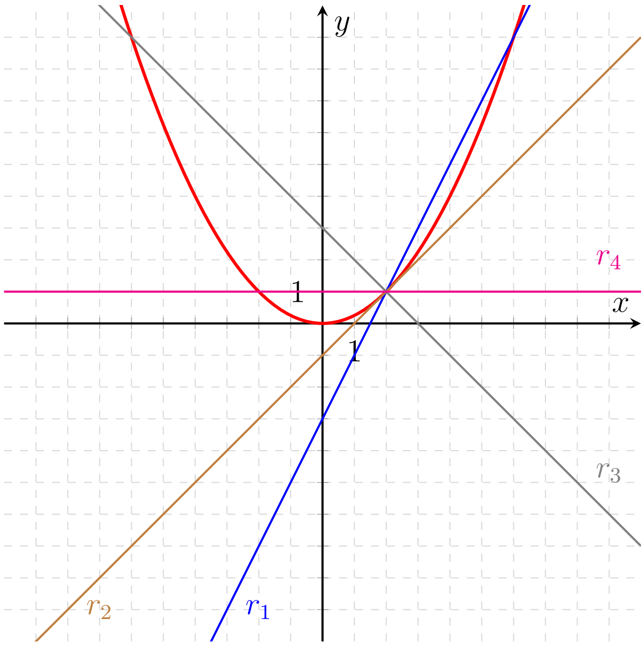
(b) Marque os pontos do gráfico de f de abscissas 2 e 6 e desenhe a reta que passa por esses pontos.

(c) Determine o coeficiente angular da reta desenhada no item anterior.

(d) Determine uma equação para a reta do item (b).

C5. Refaça o exercício anterior para a mesma função $f(x) = \dfrac{x^2}{4}$ e com as abscissas 2 e 2,1.

C6. Na figura abaixo, há o gráfico da função $f(x) = \dfrac{x^2}{4}$ e de quatro retas que passam pelo par ordenado $(2, 1)$. Qual dessas retas você escolheria para chamar de reta tangente ao gráfico de f no ponto $(2, 1)$?



C7. Entre as retas dos exercícios **C4.** e **C5.**, qual é a mais parecida com a reta tangente escolhida no exercício **C6.**? O que mudou entre os exercícios **C4.** e **C5.** para que uma dessas retas fosse mais parecida com a reta tangente? Como você faria para encontrar uma outra reta ainda mais parecida com a reta tangente?

C8. Por que, ao repetir o exercício **C4.** com abscissas repetidas 2 e 2, não obtemos como resposta a reta tangente ao gráfico de f?

C9. Refaça o item (c) do exercício **C4.** com uma função genérica f e abscissas genéricas x_0 e x. *Sugestão.* Você já fez isso no exercício **C3.**, basta observar que o ponto do gráfico de f de abscissa a qualquer é $(a, f(a))$.

C10. Refaça o item (c) do exercício **C4.** com uma função genérica f e abscissas genéricas x_0 e $x_0 + h$.

C11. Usando as ideias dos exercícios **C8.**, **C9.** e **C10.**, explique de maneira informal por que o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de uma função f no ponto de abscissa x_0 é

$$m = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

C12. A *reta normal* ao gráfico de uma função em um ponto P é definida como a reta que passa por P e é perpendicular à reta tangente ao gráfico da função em P. Ache uma equação da reta normal ao gráfico de $f(x) = 1 - x^2$ no ponto de abscissa $x_0 = 2$.

Universidade Federal de Santa Catarina
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas
Departamento de Matemática

Cálculo 1 (MTM3101 e MTM3110)

Gabarito da Lista 2.1

Reta tangente e velocidade instantânea

Última atualização: 10 de maio de 2022.

Exercícios Principais

P1.

(a) Estamos procurando por uma equação de reta, então estamos procurando por uma equação da forma $y = mx + n$ (essa equação não é válida para retas verticais). Nosso trabalho é encontrar m e n.

Etapa 1 (calcular m). Pelo que vimos em aula, $m = \lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. Para calcular esse limite, precisamos encontrar a expressão $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. Em nosso caso, $f(x) = \dfrac{x^2}{4}$, $x_0 = 2$ e $f(x_0) = f(2) = \dfrac{2^2}{4} = 1$. Substituindo os valores, obtemos

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\frac{x^2}{4} - 1}{x - 2} = \frac{x^2 - 4}{4(x-2)}.$$

Assim,

$$m = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{4(x-2)} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{4(x-2)} = \lim_{x \to 2} \frac{x+2}{4} = \frac{2+2}{4} = 1.$$

Etapa 2 (calcular n). Já sabemos que a reta procurada é $y = x + n$ (pois já vimos que $m = 1$). Para determinar n, vamos usar a informação de que essa reta passa pelo ponto de tangência $(x_0, f(x_0))$ que, nesse exemplo, é $(2, f(2)) = (2, 1)$. Assim, $1 = 2 + n$ e, portanto, $n = -1$.

Finalizando o exercício, uma equação para a reta tangente ao gráfico de $f(x) = \dfrac{x^2}{4}$ no ponto de abscissa $x_0 = 2$ é $y = x - 1$.

(b)

Etapa 1 (calcular m). Observe que $x_0 = -3$ e que $f(x_0) = f(-3) = (-3)^3 - 2 \cdot (-3) + 7 = -14$. Assim,

$$m = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to -3} \frac{x^3 - 2x + 7 - (-14)}{x + 3} = \lim_{x \to -3} \frac{x^3 - 2x + 21}{x + 3} =$$
$$\lim_{x \to -3} \frac{(x+3)(x^2 - 3x + 7)}{x + 3} = \lim_{x \to -3} (x^2 - 3x + 7) = (-3)^2 - 3 \cdot (-3) + 7 = 25.$$

Etapa 2 (calcular n). Já sabemos que a reta procurada é $y = 25x + n$. Para determinar n, vamos usar a informação de que essa reta passa pelo ponto de tangência $(x_0, f(x_0))$ que, nesse exemplo, é $(-3, f(-3)) = (-3, -14)$. Assim, $-14 = 25 \cdot (-3) + n$ e, portanto, $n = 61$.

Finalizando o exercício, uma equação para a reta tangente ao gráfico de $f(x) = x^3 - 2x + 7$ no ponto de abscissa $x_0 = -3$ é $y = 25x + 61$.

(c) $y = 2x - 2$.

(d) $y = -1$.

(e) $y = -2x - 2$.

(f) $y = 20x - 101$.

(g) $y = (2x_0)x - (x_0^2 + 1)$.

(h) $y = 3x + 2$.

(i) $y = x$.

(j) $y = \dfrac{x}{4} + 1$.

(k) $y = -\dfrac{x}{9} + \dfrac{5}{9}$.

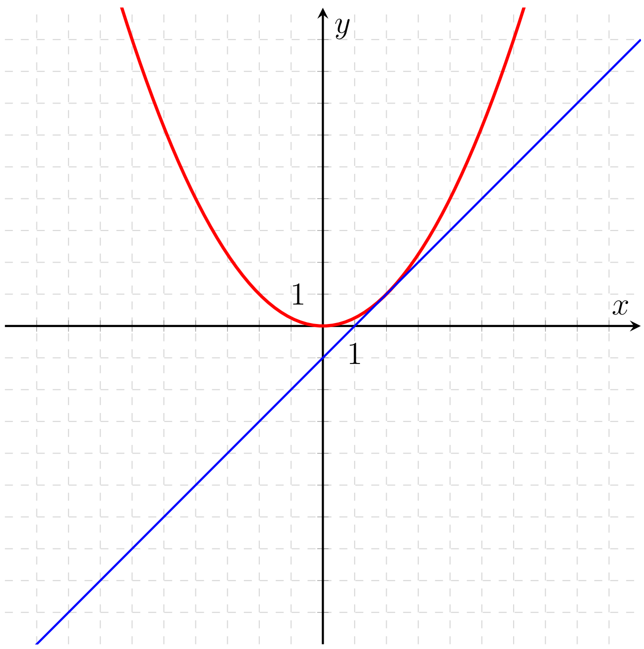
(l) $y = e^2 x - e^2$.

(m) $y = x$.

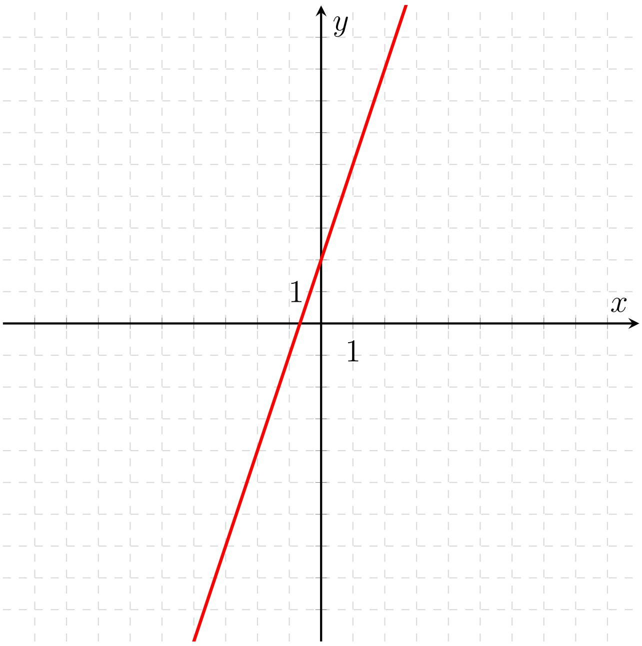
(n) $y = 1$.

P2.

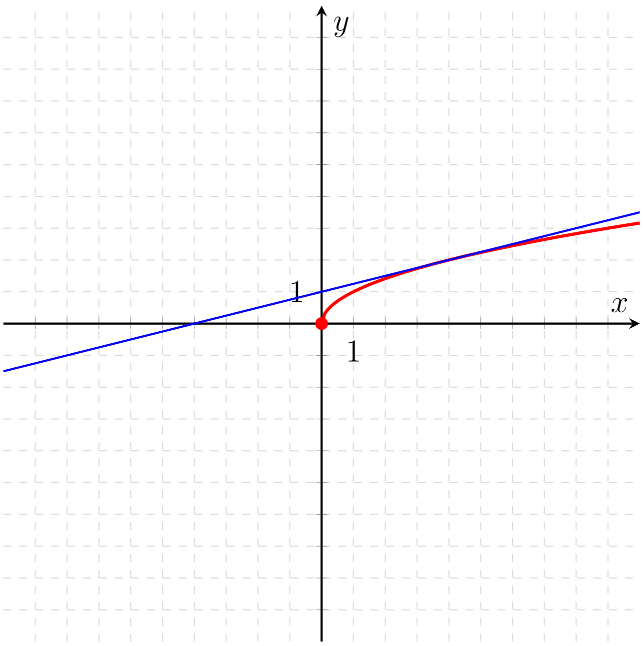
(a)



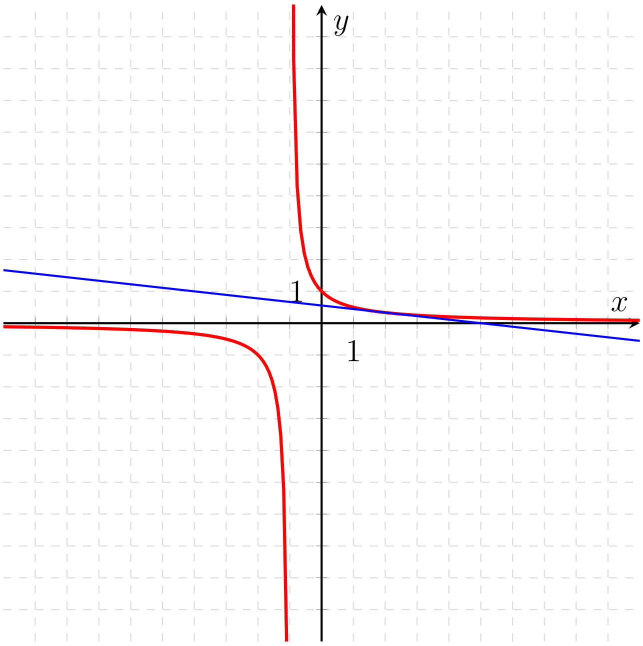
(h) O gráfico de f e a reta encontrada coincidem.



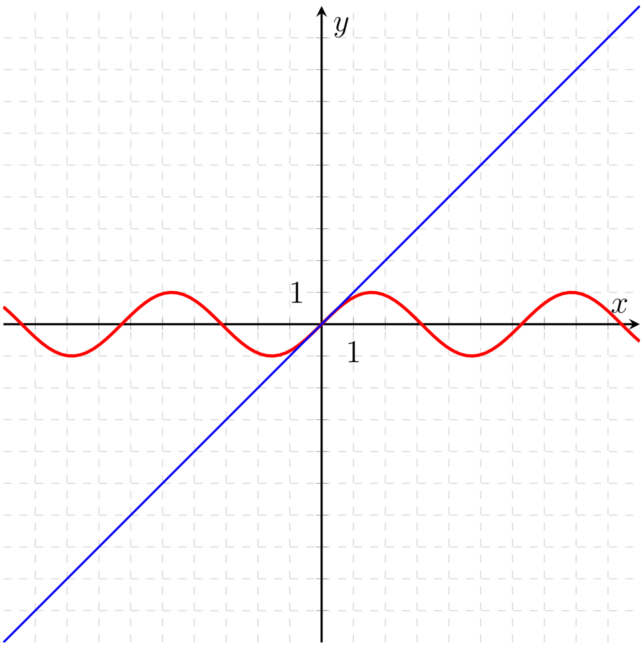
(j)



(k)



(m)



P3. $s(2) = 7\,m$ e $v(2) = 11\,m/s$.

P4. $y = 4x - 3$.

P5. $y = 2x + 1$.

Exercícios Complementares

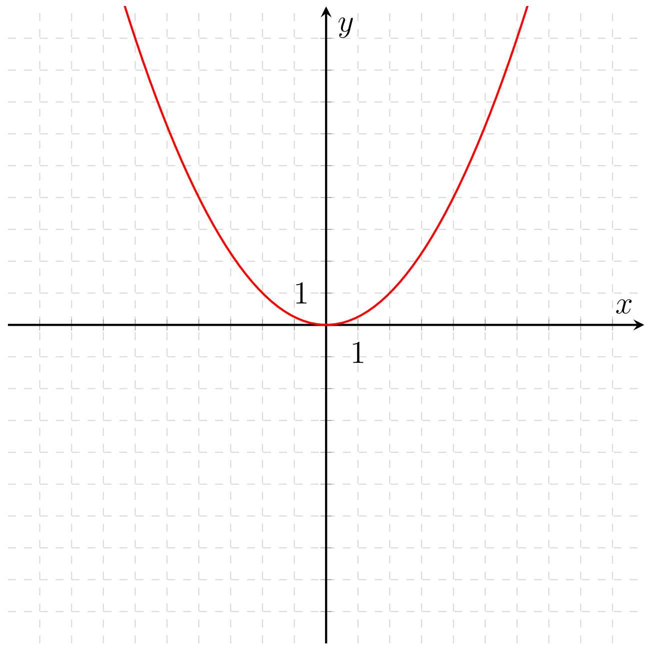
C1. $y = 2x - 1$.

C2. $y = -3x - 2$.

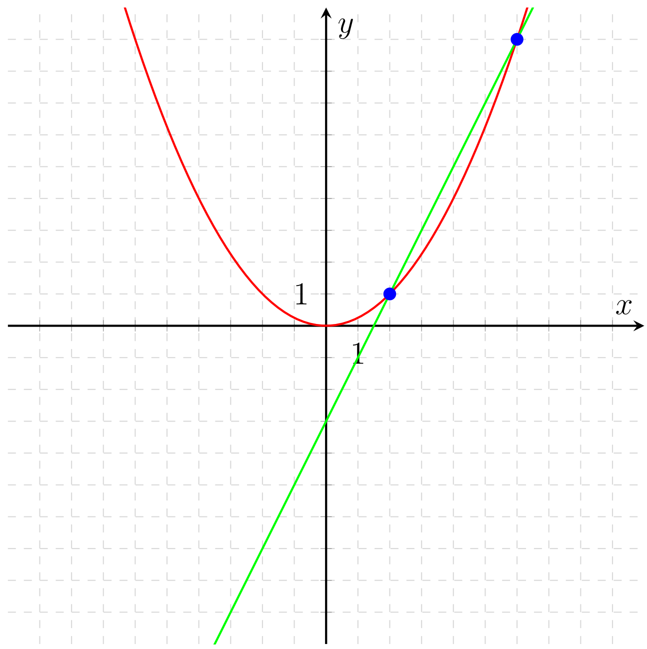
C3. $\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

C4.

(a)



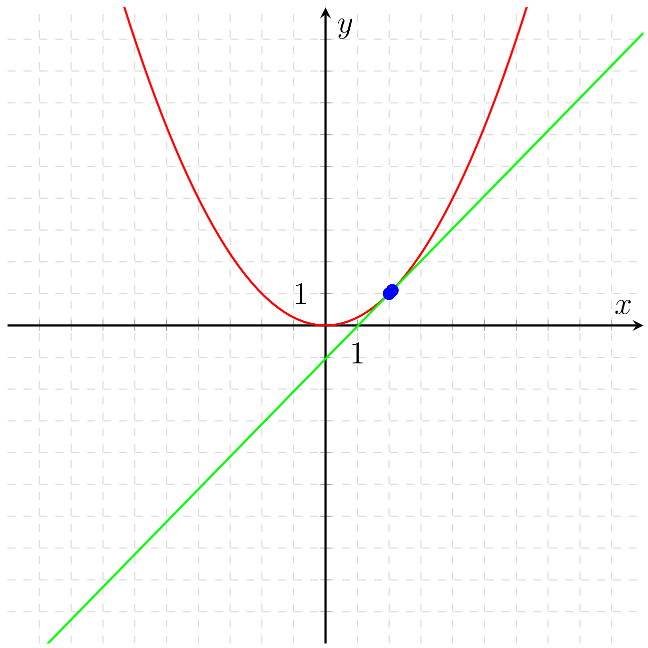
(b)



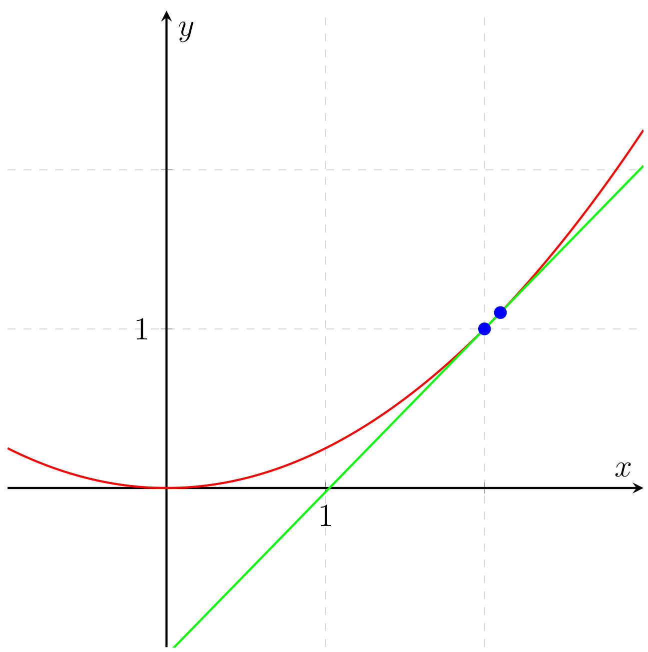
(c) 2.

(d) $y = 2x - 3$.

C5.



Mesmo gráfico com “zoom”:



Coeficiente angular: 1,025.

Equação da reta: $y = 1{,}025x - 1{,}05$.

C6. A reta r_2.

C7. A reta do exercício **C5.** é mais parecida. No exercício **C4.**, a abscissa 6 é mais distante de 2 do que a abscissa 2,1 do exercício **C5.**. Para obter uma reta ainda mais parecida com a reta tangente, bastaria trocar 2,1 do exercício **C5.** por algum número que esteja mais próximo de 2, por exemplo, 2,01.

C8. Porque o procedimento usado nos exercícios **C4.** e **C5.** com abscissas repetidas não leva a uma solução (ou obtemos um sistema com infinitas soluções ou obtemos divisão por zero, dependendo do caminho escolhido).

C9. $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

C10. $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.

C11. Pelo exercício **C9.**, o coeficiente angular da reta que passa pelos pontos $(x_0, f(x_0))$ e $(x, f(x))$ com $x \neq x_0$ é $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. Pelo exercício **C8.**, vimos que quanto mais próximo x estiver de x_0, o coeficiente angular obtido estará mais próximo do coeficiente angular da reta tangente (visualizamos isso nos exercícios **C4.** a **C7.**). Resumindo tudo até aqui: (1) temos uma função f e um ponto $(x_0, f(x_0))$ do gráfico de f, (2) procuramos pelo coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(x_0, f(x_0))$, (3) fixamos um outro ponto $(x, f(x))$ do gráfico de f e vimos que o coeficiente angular da reta que passa por $(x_0, f(x_0))$ e $(x, f(x))$ é $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, (4) vimos que este coeficiente $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ fica cada vez mais próximo do coeficiente angular da reta tangente quando x está cada vez mais próximo de x_0. Juntando todas essas informações, concluímos que

$$\text{coeficiente angular da reta tangente} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Se repetirmos o mesmo raciocínio com o **C10.**, obtemos a segunda fórmula. Esta segunda fórmula também pode ser obtida fazendo a mudança de variável $h = x - x_0$ no limite acima (tente!).

C12. $y = \dfrac{x}{4} - \dfrac{7}{2}$.