Universidade Federal de Santa Catarina
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas
Departamento de Matemática

Cálculo 1 (MTM3101 e MTM3110)

Lista 2.2 - Derivada: definição

Última atualização: 10 de maio de 2022.

Exercícios Principais

P1. Em cada item abaixo, calcule a derivada da função f no ponto x_0 indicado. *Observação.* Em muitos exercícios de limites das listas anteriores, você calculou derivadas sem saber. Reunimos aqui todos eles. Seu objetivo é ver que uma das duas definições para derivada conduz ao limite já resolvido na questão indicada. Veja o gabarito dos itens (a) e (b) caso não tenha entendido.

(a) $f(x) = x^2$, $x_0 = 3$

(b) $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x_0 = 8$

(c) $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 4$

(d) $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 1$

(e) $f(x) = x^4$, $x_0 = 2$

(f) $f(x) = \operatorname{tg} x$, $x_0 = 0$

(g) $f(x) = 4^{\frac{x+3}{5}}$, $x_0 = -3$

(h) $f(x) = \operatorname{sen}(5x)$, $x_0 = 0$

(i) $f(x) = \operatorname{sen} x$, $x_0 = \pi$

(j) $f(x) = 2^x$, $x_0 = 3$

(k) $f(x) = \operatorname{sen}(ax)$, $x_0 = 0$

(l) $f(x) = 10^{x-2}$, $x_0 = 2$

(m) $f(x) = \operatorname{senh} x$, $x_0 = 0$

P2. Em cada item abaixo, determine $f'(x)$.

(a) $f(x) = -4$.

(b) $f(x) = 3x - 1$.

(c) $f(x) = x^3$.

(d) $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$.

(e) $f(x) = e^x$.

(f) $f(x) = 1$.

P3. Dois objetos A e B movem-se sobre uma linha reta e suas posições em função do tempo são dadas, respectivamente, por $s_A(t) = 5t + 1$ e $s_B(t) = 5t^3 + 1$, sendo as posições medidas em metros e o tempo em segundos.

(a) Determine as posições iniciais dos objetos, em $t_0 = 0\,s$.

(b) Determine as posições dos objetos, em $t = 1\,s$.

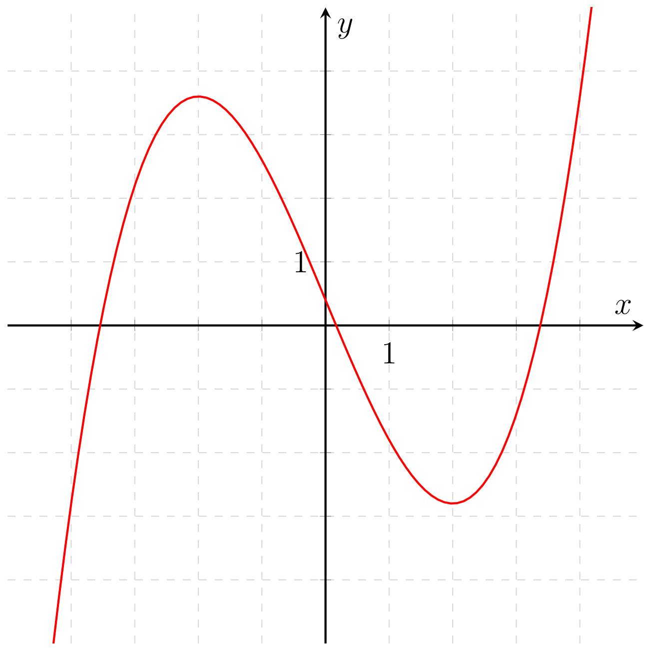
(c) Determine as velocidades médias dos objetos entre os instantes $t_0 = 0\,s$ e $t = 1\,s$.

(d) Determine as velocidades dos objetos no instante $t_0 = 0\,s$.

(e) Determine as velocidades dos objetos no instante $t = 1\,s$.

(f) Em qual instante de tempo entre $0\,s$ e $1\,s$ os dois objetos possuem a mesma velocidade?

P4. Considere a função f cujo gráfico está representado abaixo.



Estabeleça a ordem de crescimento dos números 0, $f'(-2)$, $f'(0)$, $f'(3/2)$, $f'(2)$, $f'(3)$ e $f'(4)$.

P5. Considere a função g dada por

$$g(x) = \begin{cases} x^2 + 2, & x \leqslant 1 \\ ax + 1, & x > 1. \end{cases}$$

Determine a para que g seja diferenciável em $x = 1$.

P6. Sabendo que a reta $2y + 3x + 7 = 0$ é tangente ao gráfico da função diferenciável f em $x = 3$, determine $f(3)$ e $f'(3)$.

Exercícios Complementares

C1. Seja $f(x) = |x - 3|$. Mostre que f não é diferenciável em $x_0 = 3$.

C2. Mostre que a função

$$h(x) = \begin{cases} x, & x \geqslant 3 \\ \dfrac{x^2}{3}, & x < 3 \end{cases}$$

não é diferenciável em $x_0 = 3$.

C3. Sabemos que a velocidade de um objeto em um determinado instante t_0 é o coeficiente angular da reta que é tangente na abscissa t_0 ao gráfico da posição $s(t)$ em função do tempo t. Com isso, definimos derivada e esta tem a mesma fórmula que usamos para o cálculo do coeficiente angular. Assim, a derivada da posição é a velocidade (em fórmula, isso fica $v(t) = s'(t)$).

(a) O *movimento retilíneo uniforme (MRU)* é caracterizado por ser um movimento com velocidade constante. Considerando o instante inicial de movimento como $t_0 = 0$, a posição inicial como s_0 e a velocidade como sendo v_0, a fórmula que foi passada na escola para a posição do objeto é $s(t) = s_0 + v_0 t$. Utilize seu conhecimento recém aprendido de derivada para mostrar que um objeto que possui a equação de movimento $s(t) = s_0 + v_0 t$ tem velocidade $v(t) = v_0$ em qualquer instante t (concluindo que o movimento possui, de fato, velocidade constante).

(b) O *movimento retilíneo uniforme variado (MRUV)* é caracterizado por ser um movimento com aceleração constante (nesse caso a velocidade pode variar, mas de maneira uniforme). Considerando o instante inicial de movimento como $t_0 = 0$, a posição inicial como s_0, a velocidade inicial como sendo v_0 e a aceleração como a, a fórmula que foi passada na escola para a posição do objeto é $s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$ e para a velocidade é $v(t) = v_0 + at$. Utilize seu conhecimento recém aprendido de derivada para mostrar que um objeto que possui a equação de movimento $s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$ tem velocidade $v(t) = v_0 + at$ (concluindo que as fórmulas para o MRUV são válidas).

Universidade Federal de Santa Catarina
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas
Departamento de Matemática

Cálculo 1 (MTM3101 e MTM3110)

Gabarito da Lista 2.2

Derivada: definição

Última atualização: 10 de maio de 2022.

Exercícios Principais

P1. Variamos as notações de derivada nas respostas para você acostumar com elas.

(a) Sabemos que $f'(3) = \lim_{x\to 3} \dfrac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x\to 3} \dfrac{x^2 - 9}{x - 3} = 6$. Logo, $f'(2) = 6$.

(b) Sabemos que $f'(8) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(8+h) - f(8)}{h} = \lim_{h\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{8+h} - 2}{h} = \frac{1}{12}$. Logo, $f'(8) = \frac{1}{12}$.

(c) $D_x f(4) = \dfrac{1}{4}$.

(d) $D_x f(1) = \dfrac{1}{2}$.

(e) $\dfrac{df}{dx}(2) = 32$.

(f) $\dfrac{df}{dx}(0) = 1$. Apesar de não ser correto, é comum omitir o ponto no qual a derivada foi calculada e escrever apenas $\dfrac{df}{dx}$. Nessa notação, a resposta ficaria $\dfrac{df}{dx} = 1$.

(g) $df/dx(-3) = \dfrac{2\ln 2}{5}$.

(h) $df/dx(0) = 5$. Apesar de não ser correto, é comum omitir o ponto no qual a derivada foi calculada e escrever apenas df/dx. Nessa notação, a resposta ficaria $df/dx = 5$.

(i) $f'(\pi) = -1$.

(j) $f'(3) = 8\ln 2$.

(k) $D_x f(0) = a$.

(l) $\dfrac{df}{dx}(2) = \ln 10$.

(m) $df/dx(0) = 1$.

P2.

(a) $f'(x) = 0$.

(b) $f'(x) = 3$.

(c) $f'(x) = 3x^2$.

(d) $f'(x) = \dfrac{3}{(x+2)^2}$.

(e) $f'(x) = e^x$.

(f) $f'(x) = 0$.

P3.

(a) $s_A(0) = s_B(0) = 1\,m$.

(b) $s_A(1) = s_B(1) = 6\,m$.

(c) $\bar{v}_A = \bar{v}_B = 5\,m/s$.

(d) $v_A(0) = s'_A(0) = 5\,m/s$ e $v_B(0) = s'_B(0) = 0\,m/s$.

(e) $v_A(1) = s'_A(1) = 5\,m/s$ e $v_B(1) = s'_B(1) = 15\,m/s$.

(f) $t = \frac{1}{\sqrt{3}}\,s \cong 0{,}577\,s$.

P4. $f'(0) < f'(3/2) < 0 = f'(-2) = f'(2) < f'(3) < f'(4)$.

P5. $a = 2$.

P6. $f(3) = -8$ e $f'(3) = -\dfrac{3}{2}$.

Exercícios Complementares

C1. Sabemos que $f'(3) = \lim_{x\to 3} \dfrac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x\to 3} \dfrac{|x-3|}{x-3}$. Mas já sabemos que esse limite não existe. Logo, $f'(3)$ não existe e, portanto, f não é diferenciável em $x_0 = 3$.

C2. Na lista de limites laterais, vimos que $\lim_{x\to 3} \dfrac{h(x) - h(3)}{x - 3}$ não existe. Mas esse limite é exatamente o limite que define $h'(3)$. Logo, h não é diferenciável em $x_0 = 3$.

C3.

(a) Acabamos de ver que $v(t) = s'(t)$. Usando a fórmula para $s'(t)$, temos

$$v(t) = s'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{s(t+h) - s(t)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{s_0 + v_0(t+h) - (s_0 + v_0 t)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{v_0 h}{h} = \lim_{h\to 0} v_0 = v_0.$$

(b) Acabamos de ver que $v(t) = s'(t)$. Usando a fórmula para $s'(t)$, temos

$$v(t) = s'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{s(t+h) - s(t)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{s_0 + v_0(t+h) + \frac{1}{2}a(t+h)^2 - (s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2)}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{s_0 + v_0 t + v_0 h + \frac{1}{2}at^2 + \frac{1}{2}a \cdot 2ht + \frac{1}{2}ah^2 - s_0 - v_0 t - \frac{1}{2}at^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{v_0 h + aht + \frac{1}{2}ah^2}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{(v_0 + at + \frac{1}{2}ah)h}{h} = \lim_{h\to 0} (v_0 + at + \frac{1}{2}ah) = v_0 + at + \frac{1}{2}a \cdot 0 = v_0 + at.$$