**Universidade Federal de Santa Catarina**
**Centro de Ciências Físicas e Matemáticas**
**Departamento de Matemática**

**Cálculo 1 (MTM3101 e MTM3110)**

**Lista 2.5 - Derivada como uma função**

Última atualização: 18 de maio de 2022.

## Exercícios Principais

**P1.** Utilize a definição da derivada para encontrar a derivada de $f(x) = 2x^2 + e^x$. *Observação.* Quando se pede uma derivada sem mencionar o ponto, subentende-se que o exercício está pedindo a derivada como função, isto é, $f'(x)$.

**P2.** Determine o que se pede.

**(a)** Se uma função $f$ possui derivada $f'(x) = 2x^2 - 1$, calcule $f'(-1)$, $f'(0)$ e $f'(\sqrt{3})$.

**(b)** Se uma função $f$ possui derivada $f'(x_0) = 5x_0 - 3\operatorname{sen} x_0$, calcule $f'(0)$ e $f'(\frac{\pi}{2})$.

**(c)** Calcule $f'(-4)$, $f'(0)$ e $f'(1)$, em que $f(x) = -4$.

**(d)** Calcule $f'(0)$ e $f'(2)$, em que $f(x) = 3x - 1$.

**(e)** Calcule $f'(2)$, em que $f(x) = x^3$.

**(f)** Use o item anterior para encontrar uma equação para a reta que é tangente ao gráfico da função $f(x) = x^3$ no ponto de abscissa 2.

Nas videoaulas, você viu o início da construção da tabela de derivadas (veja quadro abaixo).

| **Função** | **Derivada** |
|---|---|
| $f(x) = c,\ c \in \mathbb{R}$ | $f'(x) = 0$ |
| $f(x) = \operatorname{sen} x$ | $f'(x) = \cos x$ |
| $f(x) = e^x$ | $f'(x) = e^x$ |
| $f(x) = \ln x$ | $f'(x) = \dfrac{1}{x}$ |

| **Função** | **Derivada** |
|---|---|
| $f(x) = x^n,\ n \in \mathbb{R}$ | $f'(x) = nx^{n-1}$ |
| $f(x) = \cos x$ | $f'(x) = -\operatorname{sen} x$ |
| $f(x) = a^x,\ a > 0$ e $a \neq 1$ | $f'(x) = (\ln a) \cdot a^x$ |
| $f(x) = \log_a x,\ a > 0$ e $a \neq 1$ | $f'(x) = \dfrac{1}{(\ln a) \cdot x}$ |

Utilize essa tabela para resolver o próximo exercício.

**P3.** Determine o que se pede.

**(a)** Para $f(x) = 5$, determine $f'(x)$ e $f'(7)$.

**(b)** Para $f(x) = x$, determine $f'(x)$ e $f'(-1)$.

**(c)** Para $f(x) = x^6$, determine $f'(x)$ e $f'(-1)$.

**(d)** Para $f(x) = \sqrt{x}$, determine $f'(x)$ e $f'(9)$.

**(e)** Para $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$, determine $f'(x)$ e $f'(2)$.

**(f)** Para $f(x) = \dfrac{1}{x^3}$, determine $f'(x)$ e $f'(-2)$.

**(g)** Para $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[5]{x^3}}$, determine $f'(x)$ e $f'(1)$.

**(h)** Para $f(x) = \sqrt{2}$, determine $f'(x)$ e $f'(1)$.

**(i)** Para $f(x) = \operatorname{sen} x$, determine $f'(\frac{\pi}{2})$.

**(j)** Para $f(x) = \cos x$, determine $f'(\frac{\pi}{2})$.

**(k)** Para $f(x) = e^x$, determine $f'(2)$.

**(l)** Para $f(x) = 3^x$, determine $f'(x)$ e $f'(\frac{1}{2})$.

**(m)** Para $f(x) = \ln x$, determine $f'(5)$.

**(n)** Para $f(x) = \log_5 x$, determine $f'(x)$ e $f'(2)$.

**P4.** Sabe-se que a reta $y = 10x - 12$ é tangente ao gráfico da função $f(x) = \dfrac{x^3}{3} + 2x^2 + 14x + d$. Determine $d$.

## Exercícios Complementares

**C1.** Sejam $f$ uma função quadrática e $r$ a reta tangente ao gráfico de $f$ no ponto $(6, 6)$. Sabendo que $f$ e $r$ intersectam o eixo $y$ nos pontos $(0, 18)$ e $(0, -18)$, respectivamente, determine $f(-1)$.

**C2.** Na Unidade 1, aprendemos o que é limite. Vimos que a maior parte dos limites é fácil de calcular (quando a função é contínua no ponto no qual o limite é calculado, basta substituir), mas alguns exigem técnicas de manipulação algébrica (mudança de variável, multiplicação pelo conjugado, colocação da maior potência em evidência, limites fundamentais, propriedades e teoremas sobre limites, etc.) que nem sempre são triviais. Na semana passada, vimos a definição de derivada, que estará presente em todas as disciplinas de Cálculo, na maior parte das disciplinas de Física e em algumas outras. Como vimos, para calcular a derivada de uma função $f$ em $x_0$ precisamos resolver um dos dois limites

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Invariavelmente, os limites dessa forma não podem ser calculados só substituindo (notem que o denominador sempre se anula). Em outras palavras, para calcular uma derivada, devemos resolver um limite que não é do tipo fácil. O objetivo dos estudos dessa semana e parte da próxima é tornar o processo de calcular derivada rápido e prático, sem precisar resolver limites complicados. Vamos lá! Observemos que a derivada depende de uma função $f$ e um ponto $x_0$. Assim, uma mesma função tem derivadas em vários pontos: $f'(1)$, $f'(-2)$, $f'(7)$, etc.. Cada uma dessas derivadas requer o cálculo de um limite. A primeira estratégia é: ao invés de calcular a derivada de $f$ em um ponto específico (por exemplo, $x_0 = 2$), calculamos de forma genérica, obtendo assim o valor de $f'(x_0)$ para qualquer $x_0$ que queiramos. Resolvemos um único limite e com isso temos a resposta da derivada de $f$ em todos os pontos. Como exemplo, consideremos $f(x) = x^2$. Aplicando a definição de $f'(x_0)$ com $x_0$ genérico, obtemos

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{(x - x_0)(x + x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} (x + x_0) = x_0 + x_0 = 2x_0.$$

Com isso, ganhamos a derivada de $f(x) = x^2$ em qualquer ponto: por exemplo, $f'(50) = 2 \cdot 50 = 100$. Essa expressão obtida, $f'(x_0) = 2x_0$, quando renomeamos $x_0$ para $x$, fica $f'(x) = 2x$ e é chamada de *função derivada* de $f$. Ela guarda dentro dela o resultado da derivada de $f$ em cada ponto $x$. Repetindo esse processo para outras funções, podemos tabelar esses resultados para usar futuramente. A ideia de tabelar uma função derivada $f'$ para cada função $f$ existente parece promissora, mas tem um problema: existem infinitas funções e precisamos tabelar uma infinidade de derivadas. Para contornar esse problema, o que faremos é desenvolver uma tabela de funções básicas e, futuramente, descobrir métodos para encontrar novas derivadas a partir das derivadas já conhecidas. Esses métodos são chamados de *regras de derivação* e serão vistos a partir da próxima lista de exercícios. Nessa lista de exercícios vamos desenvolver a seguinte tabela de derivadas:

| Função | Derivada |
|---|---|
| $f(x) = c,\ c \in \mathbb{R}$ | $f'(x) = 0$ |
| $f(x) = \operatorname{sen} x$ | $f'(x) = \cos x$ |
| $f(x) = e^x$ | $f'(x) = e^x$ |
| $f(x) = \ln x$ | $f'(x) = \dfrac{1}{x}$ |

| Função | Derivada |
|---|---|
| $f(x) = x^n,\ n \in \mathbb{R}$ | $f'(x) = nx^{n-1}$ |
| $f(x) = \cos x$ | $f'(x) = -\operatorname{sen} x$ |
| $f(x) = a^x,\ a > 0 \text{ e } a \neq 1$ | $f'(x) = (\ln a) \cdot a^x$ |
| $f(x) = \log_a x,\ a > 0 \text{ e } a \neq 1$ | $f'(x) = \dfrac{1}{(\ln a) \cdot x}$ |

Esse exercício e os próximos vão guiar você na construção dessa tabela.

Seja $c$ um número real fixado e considere a função constante $f(x) = c$. Aplique a definição de limite e verifique que $f'(x) = 0$.

**C3.** Seja $n$ um número real fixado e considere a função $f(x) = x^n$. A tabela nos diz que $f'(x) = nx^{n-1}$. Nesse exercício vamos deduzir esta fórmula apenas no caso em que $n$ é um número natural positivo. Se você tiver curiosidade, pesquise ou pergunte a dedução nos outros casos (ou tente por conta própria!).

**(a)** Verifique que os produtos abaixo são verdadeiros:

- $1 \cdot (x - x_0) = x - x_0$;
- $(x + x_0) \cdot (x - x_0) = x^2 - x_0^2$;
- $(x^2 + xx_0 + x_0^2) \cdot (x - x_0) = x^3 - x_0^3$;
- $(x^3 + x^2x_0 + xx_0^2 + x_0^3) \cdot (x - x_0) = x^4 - x_0^4$;
- $(x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \cdots + xx_0^{n-2} + x_0^{n-1}) \cdot (x - x_0) = x^n - x_0^n$.

**(b)** Verifique que na expressão $x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \cdots + xx_0^{n-2} + x_0^{n-1}$ há $n$ parcelas na soma.

**(c)** Considere $f(x) = x^n$ e, usando o item (a), mostre que

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \cdots + xx_0^{n-2} + x_0^{n-1},$$

sempre que $x$ for diferente de $x_0$.

**(d)** Mostre que $f'(x) = nx^{n-1}$.

**C4.** Neste exercício vamos mostrar que se $f(x) = \operatorname{sen} x$, então $f'(x) = \cos x$.

**(a)** Mostre que

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{2\cos(x + \frac{h}{2})\operatorname{sen}(\frac{h}{2})}{h}.$$

*Sugestão.* Utilize que $\operatorname{sen}(a+b) - \operatorname{sen}(a-b) = 2\cos a \operatorname{sen} b$.

**(b)** Mostre que $f'(x) = \cos x$.

**C5.** Neste exercício vamos mostrar que se $f(x) = \cos x$, então $f'(x) = -\operatorname{sen} x$.

**(a)** Mostre que

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = -\frac{2\operatorname{sen}(x + \frac{h}{2})\operatorname{sen}(\frac{h}{2})}{h}.$$

*Sugestão.* Utilize que $\cos(a+b) - \cos(a-b) = -2\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$.

**(b)** Mostre que $f'(x) = -\operatorname{sen} x$.

**C6.** Considere a função exponencial $f(x) = a^x$, em que $a > 0$ e $a \neq 1$.

**(a)** Mostre que
$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \left(\frac{a^h - 1}{h}\right) \cdot a^x.$$

**(b)** Mostre que $f'(x) = (\ln a)a^x$.

**(c)** O que acontece com a derivada quando $a = e$, isto é, quando a função é $f(x) = e^x$ ?

**C7.** Considere a função logarítmica $f(x) = \log_a x$, em que $a > 0$ e $a \neq 1$.

**(a)** Mostre que
$$\lim_{y \to y_0} \frac{y - y_0}{a^y - a^{y_0}} = \frac{1}{(\ln a)a^{y_0}}.$$

**(b)** Mostre que para $x, x_0 > 0$ temos $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \dfrac{y - y_0}{a^y - a^{y_0}}$, em que $y = \log_a x$ e $y_0 = \log_a x_0$.

**(c)** Mostre que $f'(x) = \dfrac{1}{(\ln a)x}$.

**(d)** O que acontece com a derivada quando $a = e$, isto é, quando a função é $f(x) = \ln x$ ?

Universidade Federal de Santa Catarina
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas
Departamento de Matemática

# Cálculo 1 (MTM3101 e MTM3110)

## Gabarito da Lista 2.5

## Derivada como uma função

Última atualização: 18 de maio de 2022.

## Exercícios Principais

**P1.** $f'(x) = 4x + e^x$.

**P2.**

- **(a)** $f'(-1) = 2 \cdot (-1)^2 - 1 = 1$, $f'(0) = 2 \cdot 0^2 - 1 = -1$ e $f'(\sqrt{3}) = 2 \cdot (\sqrt{3})^2 - 1 = 5$.
- **(b)** $f'(0) = 0$ e $f'(\frac{\pi}{2}) = \frac{5\pi}{2} - 3$.
- **(c)** $f'(-4) = 0$, $f'(0) = 0$ e $f'(1) = 0$.
- **(d)** $f'(0) = 3$ e $f'(2) = 3$.
- **(e)** $f'(2) = 12$.
- **(f)** $y = 12x - 16$.

**P3.**

- **(a)** $f'(x) = 0$ e $f'(7) = 0$.
- **(b)** $f'(x) = 1$ e $f'(-1) = 1$.
- **(c)** $f'(x) = 6x^5$ e $f'(-1) = -6$.
- **(d)** $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ e $f'(9) = \dfrac{1}{6}$.
- **(e)** $f'(x) = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$ e $f'(2) = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{2}}$.
- **(f)** $f'(x) = -\dfrac{3}{x^4}$ e $f'(-2) = -\dfrac{3}{16}$.
- **(g)** $f'(x) = -\dfrac{3}{5\sqrt[5]{x^8}}$ e $f'(1) = -\dfrac{3}{5}$.
- **(h)** $f'(x) = 0$ e $f'(2) = 0$.
- **(i)** $f'(\frac{\pi}{2}) = 0$.
- **(j)** $f'(\frac{\pi}{2}) = -1$.
- **(k)** $f'(2) = e^2$.
- **(l)** $f'(x) = (\ln 3)3^x$ e $f'(\frac{1}{2}) = (\ln 3)3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}\ln 3$.
- **(m)** $f'(5) = \dfrac{1}{5}$.
- **(n)** $f'(x) = \dfrac{1}{(\ln 5)x}$ e $f'(2) = \dfrac{1}{2\ln 5}$.

**P4.** $d = -\dfrac{28}{3}$.

## Exercícios Complementares

**C1.** $f(-1) = 27$.

**C2.** $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{c - c}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{0}{h} = \lim\limits_{h\to 0} 0 = 0.$

**C3.**

**(a)**

**(b)**

**(c)**

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{x^n-x_0^n}{x-x_0}=\frac{(x^{n-1}+x^{n-2}x_0+\cdots+xx_0^{n-2}+x_0^{n-1})\cdot(x-x_0)}{x-x_0}=$$
$$x^{n-1}+x^{n-2}x_0+\cdots+xx_0^{n-2}+x_0^{n-1}.$$

**(d)**

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}(x^{n-1}+x^{n-2}x_0+\cdots+xx_0^{n-2}+x_0^{n-1})=$$
$$x_0^{n-1}+x_0^{n-2}x_0+\cdots+x_0x_0^{n-2}+x_0^{n-1}=\underbrace{x_0^{n-1}+x_0^{n-1}+\cdots+x_0^{n-1}+x_0^{n-1}}_{n\text{ parcelas}}=nx_0^{n-1}.$$

Renomeando $x_0$ para $x$, obtemos $f'(x)=nx^{n-1}$.

**C4.**

**(a)** Observe que $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\dfrac{\operatorname{sen}(x+h)-\operatorname{sen}x}{h}$. Na diferença de senos no numerador, ao fazer $a+b=x+h$ e $a-b=x$, obtemos $a=x+\frac{h}{2}$ e $b=\frac{h}{2}$ e, usando a fórmula para a diferença de senos, obtemos

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\operatorname{sen}(x+h)-\operatorname{sen}x}{h}=\frac{2\cos(x+\frac{h}{2})\operatorname{sen}(\frac{h}{2})}{h}.$$

**(b)** $f'(x)=\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2\cos(x+\frac{h}{2})\operatorname{sen}(\frac{h}{2})}{h}=\left(\lim_{h\to 0}2\cos(x+\tfrac{h}{2})\right)\left(\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}(\frac{h}{2})}{h}\right)=$ $(2\cos x)\cdot\frac{1}{2}=\cos x$.

**C5.**

**(a)** Como no exercício anterior, ao fazer $a+b=x+h$ e $a-b=x$, obtemos $a=x+\frac{h}{2}$ e $b=\frac{h}{2}$ e, usando a fórmula para a diferença de cossenos, obtemos

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}=-\frac{2\operatorname{sen}(x+\frac{h}{2})\operatorname{sen}(\frac{h}{2})}{h}.$$

**(b)** $f'(x)=\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}-\frac{2\operatorname{sen}(x+\frac{h}{2})\operatorname{sen}(\frac{h}{2})}{h}=\left(\lim_{h\to 0}-2\operatorname{sen}(x+\tfrac{h}{2})\right)\left(\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}(\frac{h}{2})}{h}\right)=$ $(-2\operatorname{sen}x)\cdot\frac{1}{2}=-\operatorname{sen}x$.

**C6.**

**(a)** $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\dfrac{a^{x+h}-a^x}{h}=\dfrac{a^x(a^h-1)}{h}=\left(\dfrac{a^h-1}{h}\right)\cdot a^x$.

**(b)** $f'(x)=\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\left(\frac{a^h-1}{h}\right)\cdot a^x=(\ln a)a^x$.

**(c)** Como $\ln e=1$, então a derivada de $f(x)=e^x$ é $f'(x)=(\ln e)e^x=e^x$.

**C7.**

**(a)** Fazendo a mudança $z = y - y_0$, obtemos,

$$\begin{aligned}\lim_{y\to y_0}\frac{y-y_0}{a^y-a^{y_0}} &= \lim_{z\to 0}\frac{z}{a^{y_0+z}-a^{y_0}} = \lim_{z\to 0}\frac{z}{a^{y_0}(a^z-1)} = \lim_{z\to 0}\frac{1}{a^{y_0}}\left(\frac{a^z-1}{z}\right)^{-1}\\ &\overset{(\star)}{=}\frac{1}{a^{y_0}}(\ln a)^{-1} = \frac{1}{(\ln a)a^{y_0}},\end{aligned}$$

onde em $(\star)$ utilizamos o fato de que a função $h(x) = \frac{1}{x}$ é contínua no ponto $x = \ln a$ (pois $0 < a \neq 1$ e, portanto, $\ln a \neq 0$).

**(b)**

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{\log_a x - \log_a x_0}{x-x_0} = \frac{y-y_0}{a^y-a^{y_0}}.$$

*Observação.* Note que denotando $y = \log_a x$ e $y_0 = \log_a x_0$, então segue da definição de logaritmo que $x = a^y$ e $x_0 = a^{y_0}$.

**(c)** Observe que

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{\log_a x - \log_a x_0}{x-x_0}.$$

Fazendo a mudança de variável $y = \log_a x$ e provisoriamente chamando $\log_a x_0$ de $y_0$, o novo limite na variável $y$ fica

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \overset{(\star)}{=} \lim_{y\to y_0}\frac{y-y_0}{a^y-a^{y_0}} = \frac{1}{(\ln a)a^{y_0}},$$

onde, em $(\star)$, usamos que a função $\log_a x$ é contínua para $x > 0$ e, portanto, $y = \log_a x$ tende a $y_0 = \log_a x_0$ quando $x$ tende a $x_0$ (isto é, $y \to y_0$). Já vimos no item anterior que $a^{y_0} = x_0$. Voltando para a letra original $x_0$, a resposta fica $f'(x_0) = \dfrac{1}{(\ln a)x_0}$. Por fim, trocando o nome da letra da função de $x_0$ para $x$, chegamos a $f'(x) = \dfrac{1}{(\ln a)x}$.

**(d)** Como $\ln e = 1$, então a derivada de $f(x) = \ln x$ é $f'(x) = \dfrac{1}{(\ln e)x} = \dfrac{1}{x}$.