Universidade Federal de Santa Catarina
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas
Departamento de Matemática

Cálculo 1 (MTM3101 e MTM3110)

Lista 2.6 - Regras de derivação

Última atualização: 18 de maio de 2022.

Exercícios Principais

P1. Nas videoaulas, você viu as primeiras regras de derivação (veja quadro abaixo). Sejam f, g e h funções e c um número real.

Função	Derivada
$h(x) = cf(x)$	$h'(x) = cf'(x)$
$h(x) = f(x) + g(x)$	$h'(x) = f'(x) + g'(x)$
$h(x) = f(x) - g(x)$	$h'(x) = f'(x) - g'(x)$

Função	Derivada
$h(x) = f(x)g(x)$	$h'(x) = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$
$h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$	$h'(x) = \dfrac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{(g(x))^2}$
$h(x) = \dfrac{1}{g(x)}$	$h'(x) = -\dfrac{g'(x)}{(g(x))^2}$

Utilize essa tabela e a tabela da lista de exercícios 2.5 na resolução dos exercícios (veja na parte de exercícios complementares para outras escritas dessa tabela).

Determine a derivada das funções abaixo.

(a) $f(x) = 17x - 65$.

(b) $f(s) = \sqrt{3}(s^3 - s^2)$.

(c) $f(x) = (1 + \sqrt{x})^2$.

(d) $g(x) = \dfrac{1}{x^4} + 2x - x^{-4}$.

(e) $f(x) = 4\,x^{250}$.

(f) $f(x) = \dfrac{3x^3 - 2x^2 + 4}{4x^3 + 5x^2}$.

(g) $f(x) = \dfrac{x}{x + \frac{3}{x}}$.

(h) $f(x) = \dfrac{e^x}{x^5 + 2x}$.

(i) $f(x) = 5^x + \log_3 x + 5x^2 \ln x$.

(j) $f(x) = \dfrac{x + 4}{x \ln x}$.

(k) $f(x) = \sec x$.

(l) $f(x) = \operatorname{cotg} x$.

(m) $f(x) = \dfrac{\cos x \operatorname{cotg} x}{\sec x - \cos x}$.

(n) $f(x) = x^3 \cos x(3 + \ln x + \operatorname{sen} x)$.

(o) $f(x) = \dfrac{x^3 + \operatorname{sen} x}{x^3 - \operatorname{sen} x}$.

(p) $f(x) = (\sqrt[3]{x} + \sqrt{x})e^x \operatorname{cotg} x$.

P2. Determine uma equação para a reta que é tangente ao gráfico de $f(x) = x^4 - 3$ e paralela à reta $y = 4x + 3$.

P3. Ache os pontos sobre a curva $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$ para os quais a reta tangente é horizontal.

P4. Sejam f e g funções e suponha que $f(5) = 1$, $f'(5) = 6$, $g(5) = -3$ e $g'(5) = 2$. Determine o que se pede.

(a) $(f + g)'(5)$. **(b)** $(2f - g)'(5)$. **(c)** $(fg)'(5)$. **(d)** $(f/g)'(5)$. **(e)** $(g/f)'(5)$.

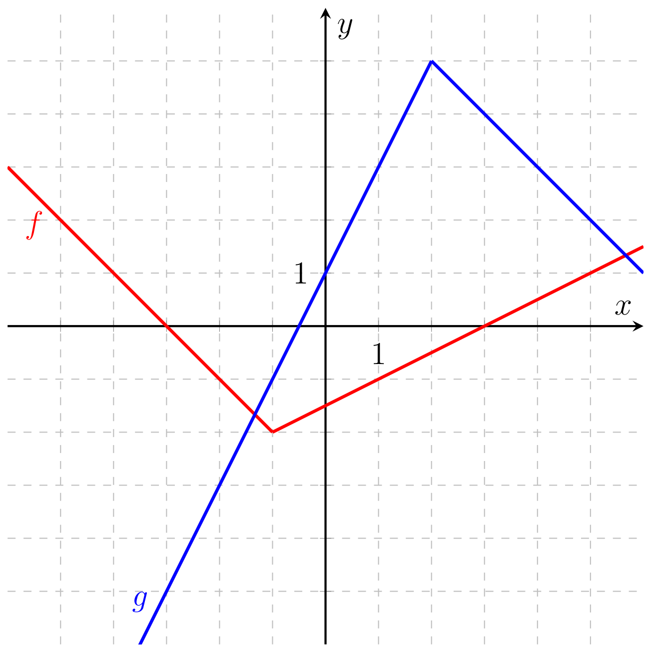
P5. Se $f(x) = \sqrt{x}g(x)$, $g(4) = 8$ e $g'(4) = 7$, determine $f'(4)$.

P6. Encontre a derivada das funções abaixo de duas formas (aplicando diretamente uma regra ou simplificando/multiplicando primeiro e aplicando outra regra) e verifique que o resultado é o mesmo.

(a) $f(x) = \dfrac{x^4 - 5x^3 + \sqrt{x}}{x^2}$.

(b) $f(x) = \left(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{3}{x^4}\right)(x + 5x^3)$.

P7. Sejam f e g funções cujos gráficos estão abaixo.



Determine $h'(-2)$, $h'(1)$ e $h'(3)$, em que $h(x) = f(x)g(x)$.

Exercícios Complementares

C1. Nas videoaulas, você viu as primeiras regras de derivação (veja quadros abaixo com três possíveis escritas). Sejam u e v funções de x e c um número real.

Função	Derivada
$f(x) = cv$	$f'(x) = cv'$
$f(x) = u \pm v$	$f'(x) = u' \pm v'$
$f(x) = uv$	$f'(x) = u'v + v'u$
$f(x) = \dfrac{u}{v}$	$f'(x) = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$
$f(x) = \dfrac{1}{v}$	$f'(x) = -\dfrac{v'}{v^2}$

Regra
$(cv)' = cv'$
$(u \pm v)' = u' \pm v'$
$(uv)' = u'v + v'u$
$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$
$\left(\dfrac{1}{v}\right)' = -\dfrac{v'}{v^2}$

Regra
$\dfrac{d(cv)}{dx} = c\dfrac{dv}{dx}$
$\dfrac{d(u \pm v)}{dx} = \dfrac{du}{dx} \pm \dfrac{dv}{dx}$
$\dfrac{d(uv)}{dx} = v\dfrac{du}{dx} + u\dfrac{dv}{dx}$
$\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$
$\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{v}\right) = -\dfrac{dv/dx}{v^2}$

Utilize essa tabela e a tabela da lista de exercícios 2.5 na resolução dos exercícios.

Determine a derivada das funções abaixo.

(a) $f(x) = \operatorname{cossec} x$.

(b) $f(x) = \operatorname{tg} x$.

(c) $f(x) = 5 \operatorname{cossec} x + \operatorname{cotg} x + x^5 \operatorname{tg} x$.

(d) $f(x) = \dfrac{2\cos x}{x^2 + \frac{1}{2}x + 1}$.

(e) $f(x) = \dfrac{\cos x + \operatorname{sen} x}{x^2 + 1}$.

(f) $f(x) = \dfrac{x^4 + 2x}{x \operatorname{sen} x}$.

(g) $f(x) = (x^2 + 3)(2x - 5)(3x + 2)$.

(h) $f(x) = \dfrac{ax + b}{cx + d}$.

C2. Mostre que a curva $y = 6x^3 + 5x - 3$ não tem reta tangente com inclinação 4.

C3. Encontre os pontos (x_0, y_0) do gráfico da função $f(x) = \dfrac{41 + 3x}{x - 3}$ nos quais a reta tangente ao gráfico é paralela à reta $y = -2x + 3$.

C4. As curvas $y = x^2 + ax + b$ e $y = cx - x^2$ têm uma tangente em comum no ponto $(1, 0)$. Encontre a, b e c.

C5. Uma das regras de derivação é a regra do produto, que diz que $(uv)' = u'v + v'u$.

(a) Aplique a fórmula acima duas vezes em sequência e encontre uma regra para a derivada do produto uvw de três funções.

(b) Estenda seu raciocínio para encontrar uma fórmula para a derivada do produto $f_1 f_2 \cdots f_n$ de n funções.

(c) Utilize a fórmula descoberta para calcular a derivada de $f(x) = x^2 e^x \operatorname{sen} x \ln x$.

C6. A *reta normal* à função f no ponto de abscissa x_0 é definida como a reta que passa por $(x_0, f(x_0))$ e é perpendicular à reta tangente a f em $(x_0, f(x_0))$. Ache uma equação da reta normal à função $f(x) = 1 - x^2$ no ponto de abscissa 2.

C7. Sejam f e g funções e suponha que $f(4) = 2$, $f'(4) = 6$, $g(4) = 5$ e $g'(4) = -3$. Em cada item, determine $h'(4)$.

(a) $h(x) = 3f(x) + 8g(x)$.

(b) $h(x) = \dfrac{g(x)}{f(x) + g(x)}$.

C8. Seja g uma função diferenciável. Determine uma expressão para a derivada das funções abaixo.

(a) $y = xg(x)$.

(b) $y = \dfrac{x}{g(x)}$.

(c) $y = \dfrac{g(x)}{x}$.

C9. Determine a função afim f que satisfaz $f(2) = 5$, $f'(2) = 3$.

C10. Calcule o limite $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{x^{1000} - 1}{x - 1}$.

C11. As funções *seno hiperbólico* e *cosseno hiperbólico* são definidas como $\operatorname{senh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ e $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, respectivamente.

(a) Mostre que, para qualquer $x \in \mathbb{R}$, $\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$.

(b) Calcule a derivada de $f(x) = \operatorname{senh} x$.

(c) Calcule a derivada de $f(x) = \cosh x$.

C12. As outras funções hiperbólicas são definidas como abaixo.

- *Tangente hiperbólica.* $\operatorname{tgh} x = \dfrac{\operatorname{senh} x}{\cosh x}$.

- *Cotangente hiperbólica.* $\operatorname{cotgh} x = \dfrac{\cosh x}{\operatorname{senh} x}$.
- *Secante hiperbólica.* $\operatorname{sech} x = \dfrac{1}{\cosh x}$.
- *Cossecante hiperbólica.* $\operatorname{cossech} x = \dfrac{1}{\operatorname{senh} x}$.

Calcule o que se pede.

(a) A derivada de $f(x) = \operatorname{tgh} x$.

(b) A derivada de $f(x) = \operatorname{cotgh} x$.

(c) A derivada de $f(x) = \operatorname{sech} x$.

(d) A derivada de $f(x) = \operatorname{cossech} x$.

Universidade Federal de Santa Catarina
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas
Departamento de Matemática

Cálculo 1 (MTM3101 e MTM3110)

Gabarito da Lista 2.6

Regras de derivação

Última atualização: 18 de maio de 2022.

Exercícios Principais

P1. Uma mesma expressão matemática pode ser escrita de diversas formas. As respostas indicadas aqui apresentam uma ou mais escritas possíveis.

(a) $f'(x) = 17$.

(b) $f'(s) = \sqrt{3}(3s^2 - 2s) = 3\sqrt{3}s^2 - 2\sqrt{3}s$.

(c) $f'(x) = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{x}} = \dfrac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$.

(d) $g'(x) = 2$, para $x \neq 0$.

(e) $f'(x) = 1000\,x^{249}$.

(f) $f'(x) = \dfrac{23x^4 - 48x^2 - 40x}{(4x^3+5x^2)^2} = \dfrac{23x^3 - 48x - 40}{x^3(4x+5)^2}$.

(g) $f'(x) = \dfrac{6x}{(x^2+3)^2}$, para $x \neq 0$.

(h) $f'(x) = \dfrac{e^x(x^5 - 5x^4 + 2x - 2)}{(x^5+2x)^2}$.

(i) $f'(x) = (\ln 5)5^x + \dfrac{1}{(\ln 3)x} + 10x\ln x + 5x$.

(j) $f'(x) = \dfrac{-4\ln x - x - 4}{(x\ln x)^2} = -\dfrac{4\ln x + x + 4}{(x\ln x)^2}$.

(k) $f'(x) = \sec x \operatorname{tg} x$.
Observação. Sempre que você calcula a derivada de uma função "elementar", você pode acrescentar à sua tabela mental de derivadas para não precisar calcular de novo.

(l) $f'(x) = -\operatorname{cossec}^2 x$.

(m) $f'(x) = -\dfrac{3}{(\sec x - \cos x)^2} = -3\operatorname{cotg}^2 x \operatorname{cossec}^2 x$.

(n) $f'(x) = 3x^2\cos x(3 + \ln x + \operatorname{sen} x) - x^3 \operatorname{sen} x(3 + \ln x + \operatorname{sen} x) + x^3\cos x\left(\dfrac{1}{x} + \cos x\right)$.

(o) $f'(x) = \dfrac{2x^3\cos x - 6x^2\operatorname{sen} x}{(x^3 - \operatorname{sen} x)^2}$.

(p) $f'(x) = \left(\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)e^x\operatorname{cotg} x + (\sqrt[3]{x} + \sqrt{x})e^x\operatorname{cotg} x - (\sqrt[3]{x} + \sqrt{x})e^x\operatorname{cossec}^2 x$.

P2. $y = 4x - 6$.

P3. $x = 1$ e $x = -2$.

P4.

(a) $(f+g)'(5) = 8$. **(b)** $(2f-g)'(5) = 10$. **(c)** $(fg)'(5) = -16$.

(d) $(f/g)'(5) = -\dfrac{20}{9}$. **(e)** $(g/f)'(5) = 20$.

P5. $f'(4) = 16$.

P6.

(a) $f'(x) = 2x - 5 - \dfrac{3}{2\sqrt{x^5}}$. **(b)** $f'(x) = 5 + \dfrac{14}{x^2} + \dfrac{9}{x^4}$.

P7. $h'(-2) = 1$, $h'(1) = -\dfrac{1}{2}$ e $h'(3) = 2$.

Exercícios Complementares

C1. Uma mesma expressão matemática pode ser escrita de diversas formas. As respostas indicadas aqui apresentam uma ou mais escritas possíveis.

(a) $f'(x) = -\operatorname{cossec} x \operatorname{cotg} x$.
Observação. Sempre que você calcula a derivada de uma função "elementar", você pode acrescentar à sua tabela mental de derivadas para não precisar calcular de novo

(b) $f'(x) = \sec^2 x$.

(c) $f'(x) = -5 \operatorname{cossec} x \operatorname{cotg} x - \operatorname{cossec}^2 x + 5x^4 \operatorname{tg} x + x^5 \sec^2 x$.

(d) $f'(x) = \dfrac{-2 \operatorname{sen} x \left(x^2 + \frac{1}{2}x + 1\right) - 2\cos x \left(2x + \frac{1}{2}\right)}{\left(x^2 + \frac{1}{2}x + 1\right)^2}$.

(e) $f'(x) = \dfrac{(\cos x - \operatorname{sen} x)(x^2+1) - 2x(\cos x + \operatorname{sen} x)}{(x^2+1)^2} = \dfrac{(x-1)^2 \cos x - (x+1)^2 \operatorname{sen} x}{(x^2+1)^2}$.

(f) $f'(x) = \dfrac{3x^2 \operatorname{sen} x - (x^3+2)\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}$.

(g) $f'(x) = 2(x^2+3)(3x+2) + 3(x^2+3)(2x-5) + 2x(2x-5)(3x+2) = 24x^3 - 33x^2 + 16x - 33$.

(h) $f'(x) = \dfrac{ad - bc}{(cx+d)^2}$.

C2. A equação $f'(x) = 18x^2 + 5 = 4$ não possui solução real.

C3. $(-2, -7)$ e $(8, 13)$.

C4. $a = -3$, $b = 2$ e $c = 1$.

C5.

(a) $(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'$.

(b) $(f_1 f_2 \cdots f_n)' = f_1' f_2 \cdots f_n + f_1 f_2' \cdots f_n + \cdots + f_1 f_2 \cdots f_n'$.

(c) $f'(x) = 2xe^x \operatorname{sen} x \ln x + x^2 e^x \operatorname{sen} x \ln x + x^2 e^x \cos x \ln x + xe^x \operatorname{sen} x$.

C6. $y = \dfrac{x}{4} - \dfrac{7}{2}$.

C7.

(a) $h'(4) = -6$.

(b) $h'(4) = -\dfrac{36}{49}$.

C8.

(a) $y' = g(x) + xg'(x)$.

(b) $y' = \dfrac{g(x) - xg'(x)}{(g(x))^2}$.

(c) $y' = \dfrac{xg'(x) - g(x)}{x^2}$.

C9. $f(x) = 3x - 1$.

C10. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^{1000} - 1}{x - 1} = 1000$.

C11.

(a) $\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = \left(\dfrac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 = \left(\dfrac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4}\right) - \left(\dfrac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4}\right) = \dfrac{e^{2x} + 2 + e^{-2x} - e^{2x} + 2 - e^{-2x}}{4} = \dfrac{4}{4} = 1$.

(b) $f'(x) = \cosh x$.

(c) $f'(x) = \operatorname{senh} x$.

C12.

(a) $f'(x) = \operatorname{sech}^2 x$.

(b) $f'(x) = -\operatorname{cossech}^2 x$.

(c) $f'(x) = -\operatorname{sech} x \operatorname{tgh} x$.

(d) $f'(x) = -\operatorname{cossech} x \operatorname{cotgh} x$.