



Cálculo 1 (MTM3101 e MTM3110)

Lista 2.7 - Regra da cadeia

Última atualização: 25 de maio de 2022.

Exercícios Principais

P1. Nas videoaulas, você viu mais uma regra de derivação: a *regra da cadeia*. Cada linha da tabela abaixo é uma escrita da regra da cadeia, em diferentes notações.

Regra da cadeia
Se $h(x) = (f \circ g)(x)$, então $h'(x) = (f' \circ g)(x)g'(x)$
Se $h(x) = f(g(x))$, então $h'(x) = f'(g(x))g'(x)$
$(u \circ v)' = (u' \circ v)v'$
$\frac{du}{dt} = \frac{du}{dx} \frac{dx}{dt}$

Utilize essa em conjunto com as tabelas das listas de exercícios 2.5 e 2.6 na resolução dos exercícios. Nos itens abaixo, identifique funções f e g de modo que $h(x) = f(g(x))$.

Nota: cada item dessa questão pode ter mais de uma solução correta.

(a) $h(x) = \sqrt[3]{1+4x}$.

(b) $h(x) = (2x^3 + 5)^4$.

(c) $h(x) = \operatorname{tg}(\pi x)$.

(d) $h(x) = \operatorname{sen}(\operatorname{cotg} x)$.

(e) $h(x) = \sqrt{\operatorname{sen} x}$.

(f) $h(x) = \operatorname{sen} \sqrt{x}$.

P2. Determine a derivada das funções abaixo.

(a) $f(x) = \operatorname{sen}(10x + 3)$.

(b) $f(x) = e^{x^2+x-1}$.

(c) $f(x) = \ln(\cos x)$.

(d) $f(x) = (2x^3 - \operatorname{tg} x)^{32}$.

(e) $f(x) = \sqrt{1+x^2}$.

(f) $f(x) = \cos(x^3)$.

(g) $f(x) = \cos^3 x$.

(h) $f(x) = \sqrt{x+2} + \frac{6}{x^3+2x}$.

(i) $f(x) = \sqrt{1+\sqrt{1+x}}$.

(j) $g(x) = \frac{\sqrt[3]{x^2-3}}{6x^2+3}$.

(k) $g(x) = e^{x^3} \ln(3 + \sqrt{x})$.

(l) $f(x) = \ln(x + \cos x)$.

(m) $y = \cos(\operatorname{sen} x)$.

(n) $y = \ln(\operatorname{cossec} x + \operatorname{cotg} x)$.

(o) $y = \operatorname{sen}[(2t+5)^{-2/3}]$.

(p) $f(x) = \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^4 x}$.

P3. Sejam f e g funções e suponha que $f(-2) = 8$, $f'(-2) = 4$, $f'(5) = 3$, $g(5) = -2$ e $g'(5) = 6$. Se $h(x) = f(g(x))$, determine $h'(5)$.

P4. A composição de funções tem uma interpretação mais natural em contextos aplicados. Por exemplo, imagine um objeto de massa 4 kg movendo-se sobre uma linha reta com velocidade em função do tempo dada por $v(t) = t^2 - 1$. Sabemos que a energia cinética deste objeto, em termos da velocidade, é dada por $K(v) = \frac{1}{2}mv^2 = 2v^2$. Uma pergunta natural aqui seria determinar a energia cinética em função do tempo. Isso é fácil de fazer, basta substituir o valor de v , isto é, $K(t) = 2(t^2 - 1)^2$. Apesar de não parecer, fizemos uma composição de funções aqui. Traduzindo para o contexto matemático, pensemos que as duas funções envolvidas (escritas na variável x) são $v(x) = x^2 - 1$ e $K(x) = 2x^2$. A composição de K com v tem como resultado $(K \circ v)(x) = K(v(x)) = 2(x^2 - 1)^2$ que é o mesmo resultado obtido acima, apenas com o nome da variável diferente. Essa interpretação é útil para analisarmos a regra da cadeia sob um outro ponto de vista. Nesse exemplo, $dK/dv = 4v$ e $dv/dt = 2t$. Curiosamente, a derivada da composição $K \circ v$ pode ser vista como

$$\frac{dK}{dt} = \frac{dK}{dv} \frac{dv}{dt} = 4v \cdot 2t = 8tv.$$

Você pode dizer prontamente que isso não dá a mesma coisa que usar a regra da cadeia. Lembremos que v , na verdade, tem uma escrita em termos de t . Substituindo, obtemos $dK/dt = 8tv = 8t(t^2 - 1)$, que é a resposta dada pela regra da cadeia. Em resumo, a regra da cadeia escrita da forma $\frac{du}{dt} = \frac{du}{dx} \frac{dx}{dt}$ (última linha da tabela no início da lista) está correta, entendendo que o termo $\frac{du}{dx}$ será escrito em termos de t após substituir x .

Em cada item, determine o que se pede.

(a) Dados $\tau = I \cdot \alpha$, onde I é constante em t e $\alpha(t) = 2t^3$, determine $d\tau/dt$.

(b) Dados $F = \frac{Gm_1m_2}{r^2}$, onde G , m_1 , m_2 são constantes em t e $r(t) = \sqrt{3t^2 + 1}$, determine dF/dt .

(c) Dados $K = \frac{1}{2}I\omega^2$, onde I é constante em t e $\omega(f) = 2\pi f$, determine dK/df .

Sugestão. Faça a questão acima por três métodos diferentes: (1) escrevendo as funções com o mesmo nome de variável e aplicando a regra da cadeia padrão; (2) Substituindo a segunda função dentro da primeira e já trabalhando com a primeira função na variável sobre a qual queremos derivar e (3) usando a fórmula $\frac{du}{dt} = \frac{du}{dx} \frac{dx}{dt}$, obtendo uma escrita híbrida com x e t e depois substituir x pelo seu valor em termos de t .

P5. A posição de uma partícula sobre uma corda vibrante é dada pela equação $s(t) = 10 + \frac{1}{4} \sin(10\pi t)$, em que $s(t)$ é medido em centímetros e t em segundos. Determine a função velocidade da partícula.

P6. Uma equação em que a incógnita é uma função é chamada de *equação funcional*. Quando há derivadas nessa equação, chamamos de *equação diferencial*. Assim como para equações tradicionais, uma função é uma solução da equação se, ao ser substituída no lugar da incógnita torna a igualdade verdadeira (igualdade do ponto de vista de funções, válida para todo valor de x). Mostre que $y = 2x^2 - 1$ é uma solução da equação $3xy' - 6y = 6$.

P7. Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$ tais que $f(x) = (ax + b)e^{4x^2+4x+1}$ e $f'(x) = (16x^2 + 56x + c)e^{4x^2+4x+1}$. Determine a , b e c .

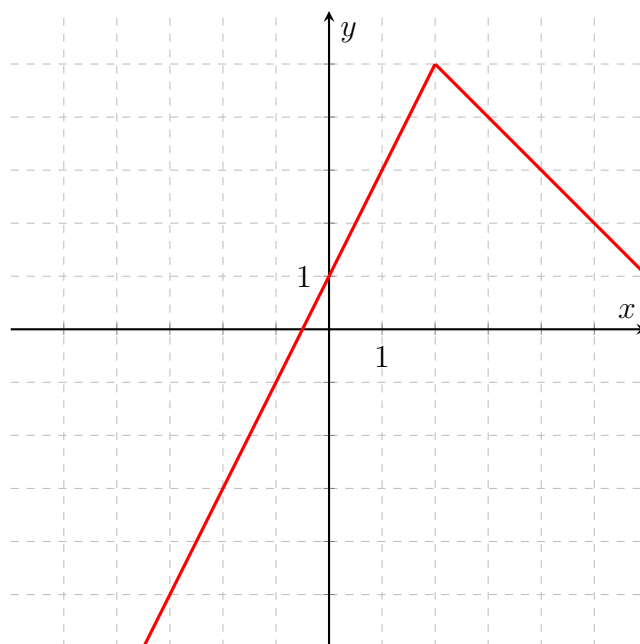
P8. Sejam $f(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2}$ e $g(x) = a \sin(5x) + bxe^{-x} + 6 \ln(x+1)$. Determine $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $f'(1) = -11$ e $g'(0) = 25$.

Exercícios Complementares

C1. Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$ uma função tal que $f(2) = 16$ e $f'(2) = 8$. Determine $g'(2)$, em que

$$g(x) = xf(x) + \frac{f(x)}{x} + \sqrt{f(x)}.$$

C2. Sejam f a função cujo gráfico está abaixo.



Determine $g'(-2)$, em que $g(x) = (x^2 + f(x))^5$.

C3. Determine a derivada das funções abaixo.

(a) $H(z) = (z^3 - 3z^2 + 1)^{-3}$.

(b) $F(x) = \frac{(5x - 8)^{-2}}{(x^2 + 3)^{-3}}$.

(c) $f(x) = \sqrt[7]{x^3} + 10^{1-x^2}$.

(d) $f(x) = \sqrt[4]{\frac{x-2}{x+2}}$.

(e) $y = \sqrt{x^4 + e^{\sqrt{x}}}$.

(f) $f(x) = e^{2x} \ln\left(x \sin x + \frac{e^{-x}}{x^5 + 1}\right)$.

(g) $y = e^{\operatorname{tg}^2 x}$.

(h) $f(t) = \frac{te^{2 \operatorname{sen} t}}{\ln(3t + 1)}$.

(i) $g(x) = (7x^2 + 6x)^7(3x - 1)^4$.

C4. Se $h(x) = \sqrt{4 + 3f(x)}$, $f(1) = 7$ e $f'(1) = 4$, determine $h'(1)$.

C5. Muitas tabelas de derivadas não vêm com a regra da cadeia de forma explícita, ela aparece embutida nas fórmulas das derivadas elementares. Por exemplo, é muito comum você encontrar $(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$ no lugar de $(\operatorname{sen} x)' = \cos x$. Nesse exercício vamos aprender esse outro tipo de formulação.

(a) Sejam $f(x) = \operatorname{sen} x$ e $g(x) = u$ (pense aqui que u é uma função de x em que omitimos o parênteses com x) e considere $h(x) = f(g(x))$. Escreva quem é $h(x)$ explicitamente.

- (b) Nas mesmas condições do exercício acima, determine $h'(x)$, deixando a resposta em termos de u .
- (c) Juntando os itens (a) e (b) você descobriu que $(\sin u)' = u' \cos u$. Essa fórmula pode ser lida como “a derivada do seno de alguma coisa é a derivada da coisa vezes o cosseno da coisa”. Sem passar pela formulação da regra da cadeia original, utilize essa fórmula para determinar a derivada de $f(x) = \sin(x^2 - x + 1)$.
- (d) Como você pode reobter a fórmula $(\sin x)' = \cos x$ a partir de $(\sin u)' = u' \cos u$?
- (e) Utilize um raciocínio análogo com $f(x) = x^n$ e $g(x) = u$ e descubra que $(u^n)' = nu'u^{n-1}$.
- (f) Usando a resposta do item anterior, calcule a derivada de $f(x) = (2x^3 - x^2 + 2)^{700}$.
- (g) Repita a ideia para as derivadas elementares que você conhece e construa sua nova tabela de derivadas já com a regra da cadeia embutida. Após concluir o resultado, perceba que todas elas são construídas da mesma forma: substitui-se na fórmula original x por u e multiplica-se a derivada por u' .
- C6.** Já vimos que a função $|x|$ não é diferenciável em $x = 0$, mas que a derivada existe em todos os outros pontos (igual a -1 se x é negativo e 1 se x é positivo). Nesse exercício vamos usar um artifício para trabalhar com a derivada de funções com módulo sem ter que separar em partes.
- (a) Verifique que $|x| = \sqrt{x^2}$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
- (b) Pelo item (a), a função $h(x) = |x|$ é a composição das funções $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = x^2$. Use isso e a regra da cadeia para encontrar $h'(x)$. Verifique que sua resposta está de acordo com o esperado.
- (c) Utilize a fórmula descoberta no item anterior e a regra da cadeia para calcular a derivada de $f(x) = |3x - 1|e^x$.
- C7.** A equação geral da posição de um objeto em movimento harmônico simples é dada por $s(t) = A \cos(\omega t + \phi)$, em que A , ω e ϕ são constantes. Determine $v(t)$.
- C8.** Muitas vezes quando vamos modelar um problema físico, uma equação diferencial é obtida. Por exemplo, ao aplicar as leis da Física ao problema de um objeto em queda livre em que supõe-se que a resistência do ar é proporcional à velocidade, a equação diferencial obtida para a velocidade do objeto é $mv'(t) + kv(t) - mg = 0$, em que m é a massa do objeto, g é a aceleração da gravidade e k é a constante de proporcionalidade associada à resistência do ar. Mostre que $v(t) = \frac{mg}{k}(1 - e^{-\frac{kt}{m}})$ é uma solução para a equação.
- C9.** A regra da cadeia diz que $(u \circ v)' = (u' \circ v)v'$.
- (a) Aplique a fórmula acima duas vezes em sequência e encontre uma regra para a derivada da composição $u \circ v \circ w$ de três funções.
- (b) Estenda seu raciocínio para encontrar uma fórmula para a derivada da composição $f_1 \circ f_2 \circ \cdots \circ f_n$ de n funções.
- (c) Utilize a fórmula descoberta para calcular a derivada de $f(x) = \sin(1 + \cos(1 + \tan(1 + x + x^2)))$.
- C10.** Utilize a regra da cadeia para provar as afirmações abaixo.
- (a) A derivada de uma função par é uma função ímpar.
- (b) A derivada de uma função ímpar é uma função par.
- C11.** Nenhuma das regras de derivação que vimos até agora é capaz de, diretamente, resolver a derivada de uma função elevada a outra função, por exemplo $f(x) = x^{\sin x}$. Use que $u^v = e^{v \ln u}$ para mostrar que

$$(u^v)' = u^v \left(\frac{u'v}{u} + v' \ln u \right).$$

C12. Use a fórmula do exercício anterior para determinar a derivada das funções abaixo.

(a) $g(x) = (3 + \operatorname{tg} x)^x.$

(b) $y = (\ln x)^x.$

(c) $f(x) = x^\pi + x^{x^x}.$

(d) $f(x) = (5 + \cos(5x))^{x^2}.$



Cálculo 1 (MTM3101 e MTM3110)

Gabarito parcial da Lista 2.7

Regra da cadeia

Última atualização: 25 de maio de 2022.

Exercícios Principais

P1. A escolha de f e g aqui não é única, mas essa que está no gabarito é a mais útil para usar no cálculo da derivada de h pois as derivadas de f e g podem ser calculadas por métodos já conhecidos.

(a) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ e $g(x) = 1 + 4x$.

(b) $f(x) = x^4$ e $g(x) = 2x^3 + 5$.

(c) $f(x) = \operatorname{tg} x$ e $g(x) = \pi x$.

(d) $f(x) = \operatorname{sen} x$ e $g(x) = \operatorname{cotg} x$.

(e) $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = \operatorname{sen} x$.

(f) $f(x) = \operatorname{sen} x$ e $g(x) = \sqrt{x}$.

P2. Uma mesma expressão matemática pode ser escrita de diversas formas. As respostas indicadas aqui apresentam uma ou mais escritas possíveis.

(a) $f'(x) = 10 \cos(10x + 3)$.

(b) $f'(x) = (2x + 1)e^{x^2+x-1}$.

(c) $f'(x) = -\operatorname{tg} x$.

(d) $f'(x) = 32(6x^2 - \sec^2 x)(2x^3 - \operatorname{tg} x)^{31}$.

(e) $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

(f) $f'(x) = -3x^2 \operatorname{sen}(x^3)$.

(g) $f'(x) = -3 \cos^2 x \operatorname{sen} x$.

(h) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+2}} - \frac{18x^2+12}{(x^3+2x)^2}$.

(i) $f'(x) = \frac{1}{4\sqrt{1+x}\sqrt{1+\sqrt{1+x}}}$.

(j) $g'(x) = \frac{(4x^3+2x)(x^2-3)^{-2/3} - 12x(x^2-3)^{1/3}}{(6x^2+3)^2}$.

(k) $g'(x) = 3x^2 e^{x^3} \ln(3 + \sqrt{x}) + \frac{e^{x^3}}{2\sqrt{x}(3 + \sqrt{x})}$.

(l) $f'(x) = \frac{1 - \operatorname{sen} x}{x + \cos x}$.

(m) $y' = -\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x) \cos x$.

(n) $y' = -\operatorname{cosec} x$.

(o) $y' = -\frac{4}{3}(2t+5)^{-5/3} \cos[(2t+5)^{-2/3}]$.

$$(p) \quad f'(x) = -\frac{\operatorname{sen}^2 x + 4 \cos^2 x}{\operatorname{sen}^5 x} = -\frac{1 + 3 \cos^2 x}{\operatorname{sen}^5 x}.$$

P3. $h'(5) = 24$.

P4.

$$(a) \quad d\tau/dt = 6It^2. \quad (b) \quad dF/dt = -\frac{6tGm_1m_2}{(3t^2 + 1)^2}. \quad (c) \quad dK/df = 4\pi^2 If.$$

P5. $v(t) = s'(t) = \frac{5\pi}{2} \cos(10\pi t)$.

P6. Notemos que $y' = 4x$. Assim, $3xy' - 6y = 3x(4x) - 6(2x^2 - 1) = 12x^2 - 12x^2 + 6 = 6$.

P7. $a = 2$, $b = 6$ e $c = 26$.

P8. $a = 3$ e $b = 4$.

Exercícios Complementares

C1. $g'(2) = 33$.

C2. $g'(-2) = -10$.

C3. Uma mesma expressão matemática pode ser escrita de diversas formas. As respostas indicadas aqui apresentam uma ou mais escritas possíveis.

(a) $H'(z) = (-9z^2 + 18z)(z^3 - 3z^2 + 1)^{-4} = \frac{-9z^2 + 18z}{(z^3 - 3z^2 + 1)^4}.$

(b) $F'(x) = \frac{6x(x^2 + 3)^2}{(5x - 8)^2} - \frac{10(x^2 + 3)^3}{(5x - 8)^3}.$

(c) $f'(x) = \frac{3}{7\sqrt[7]{x^4}} - 2(\ln 10)x10^{1-x^2}.$

(d) $f'(x) = \frac{1}{(x - 2)^{3/4}(x + 2)^{5/4}}.$

(e) $y' = \frac{1}{2\sqrt{x^4 + e^{\sqrt{x}}}} \left(4x^3 + \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} \right).$

(f) $f'(x) = 2e^{2x} \ln \left(x \operatorname{sen} x + \frac{e^{-x}}{x^5 + 1} \right) + e^{2x} \frac{\operatorname{sen} x + x \cos x - \frac{(x^5 + 5x^4 + 1)e^{-x}}{(x^5 + 1)^2}}{x \operatorname{sen} x + \frac{e^{-x}}{(x^5 + 1)}}.$

(g) $y' = 2 \operatorname{tg} x \sec^2 x e^{\operatorname{tg}^2 x}.$

(h) $f'(t) = \frac{(e^{2 \operatorname{sen} t} + 2t \cos t e^{2 \operatorname{sen} t})}{\ln(3t + 1)} - \frac{3te^{2 \operatorname{sen} t}}{(3t + 1)[\ln(3t + 1)]^2}.$

(i) $g'(x) = 7(14x + 6)(7x^2 + 6x)^6(3x - 1)^4 + 12(7x^2 + 6x)^7(3x - 1)^3 = (7x^2 + 6x)^6(3x - 1)^3(378x^2 + 100x - 42).$

C4. $h'(1) = \frac{6}{5}.$

C5.

- (a) $h(x) = \sin u$.
- (b) $h'(x) = u' \cos u$.
- (c) Com $u = x^2 - x + 1$, a função f se torna $f(x) = \sin u$ e sua derivada fica $f'(x) = u' \cos u = (2x - 1) \cos(x^2 - x + 1)$.
- (d) Basta usar $u = x$. Nesse caso, $u' = 1$ e a fórmula volta a ser a que tínhamos inicialmente. Em outras palavras, a fórmula $(\sin u)' = u' \cos u$ abrange tanto a versão original quanto todas as outras que podem ser construídas a partir da composição do seno com outra função.
- (e) $h(x) = f(g(x)) = u^n$ e $h'(x) = nu^{n-1}u' = nu'u^{n-1}$.
- (f) Com $u = 2x^3 - x^2 + 2$, a função f se torna $f(x) = u^{700}$ e sua derivada fica $f'(x) = nu'u^{n-1} = 700(6x^2 - 2x)(2x^3 - x^2 + 2)^{699}$.
- (g) Seja u uma função de x , c , n e a números reais com $a > 0$ e $a \neq 1$.

Função	Derivada
$f(x) = c$	$f'(x) = 0$
$f(x) = \sin u$	$f'(x) = u' \cos u$
$f(x) = \operatorname{tg} u$	$f'(x) = u' \sec^2 u$
$f(x) = \sec u$	$f'(x) = u' \sec u \operatorname{tg} u$
$f(x) = e^u$	$f'(x) = u' e^u$
$f(x) = \ln u$	$f'(x) = \frac{u'}{u}$

Função	Derivada
$f(x) = u^n$	$f'(x) = nu'u^{n-1}$
$f(x) = \cos u$	$f'(x) = -u' \sin u$
$f(x) = \operatorname{cotg} u$	$f'(x) = -u' \operatorname{cosec}^2 u$
$f(x) = \operatorname{cosec} u$	$f'(x) = -u' \operatorname{cosec} u \operatorname{cotg} u$
$f(x) = a^u$	$f'(x) = (\ln a)u' \cdot a^u$
$f(x) = \log_a u$	$f'(x) = \frac{u'}{(\ln a)u}$

C6.

- (a)
- (b) $h'(x) = \frac{x}{|x|}$.
- (c) $f'(x) = \frac{3(3x-1)e^x}{|3x-1|} + |3x-1|e^x = \frac{(9x^2+3x-2)e^x}{|3x-1|}$.

C7. $v(t) = s'(t) = -A\omega \sin(\omega t + \phi)$.

C8. Observemos que $v'(t) = \frac{mg}{k} \frac{k}{m} e^{-\frac{kt}{m}} = ge^{-\frac{kt}{m}}$. Assim,

$$mv'(t) + kv(t) - mg = mge^{-\frac{kt}{m}} + k \frac{mg}{k} (1 - e^{-\frac{kt}{m}}) - mg = mge^{-\frac{kt}{m}} + mg - mge^{-\frac{kt}{m}} - mg = 0.$$

C9.

- (a) $(u \circ v \circ w)' = (u' \circ v \circ w)(v' \circ w)w'$.
- (b) $(f_1 \circ f_2 \circ \dots \circ f_n)' = (f_1' \circ f_2 \circ \dots \circ f_n)(f_2' \circ \dots \circ f_n) \dots (f_{n-1}' \circ f_n)f_n'$.
- (c) $f'(x) = -(1+2x) \cos(1 + \cos(1 + \operatorname{tg}(1+x+x^2))) \sin(1 + \operatorname{tg}(1+x+x^2)) \sec^2(1+x+x^2)$.

C10.

- (a) Seja f uma função par, isto é, $f(x) = f(-x)$. Derivando os dois lados da igualdade, obtemos $f'(x) = -f'(-x)$, ou seja, f' é ímpar.

- (b) Seja f uma função ímpar, isto é, $f(x) = -f(-x)$. Derivando os dois lados da igualdade, obtemos $f'(x) = -(-1)f'(-x) = f'(-x)$, ou seja, f' é par.

C11.

C12.

(a) $g'(x) = (3 + \operatorname{tg} x)^x \left[\ln(3 + \operatorname{tg} x) + \frac{x \sec^2 x}{3 + \operatorname{tg} x} \right].$

(b) $y' = (\ln x)^x \left[\frac{1}{\ln x} + \ln(\ln x) \right].$

(c) $f'(x) = \pi x^{\pi-1} + x^{x^x} \left[x^x (\ln x + \ln^2 x) + \frac{x^x}{x} \right].$

(d) $f'(x) = (5 + \cos(5x))^{x^2} \left[2x \ln(5 + \cos(5x)) - \frac{5x^2 \operatorname{sen}(5x)}{5 + \cos(5x)} \right].$