



Cálculo 1 (MTM3101 e MTM3110)

Lista 2.9 - Derivada da função inversa

Última atualização: 25 de maio de 2022.

Exercícios Principais

P1. Uma nova regra de derivação foi deduzida nesse tópico: a derivada da função inversa. A tabela da esquerda representa três formas de escrever a mesma regra, apenas em notações diferentes. A tabela da direita apresenta a derivada das inversas das funções seno, cosseno e tangente (já com a regra da cadeia embutida).

Derivada da função inversa	Função	Derivada
$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$	$f(x) = \arcsen u$	$f'(x) = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$(u^{-1})' = \frac{1}{u' \circ u^{-1}}$	$f(x) = \arccos u$	$f'(x) = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$\frac{dx}{du} = \left(\frac{du}{dx}\right)^{-1} = \frac{1}{du/dx}$	$f(x) = \operatorname{arctg} u$	$f'(x) = \frac{u'}{1+u^2}$

Utilize a tabela para determinar a derivada das funções abaixo

(a) $f(x) = \arcsen\left(\frac{3x+1}{x}\right)$.

(b) $f(x) = \arccos\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$.

(c) $f(x) = x^2 \operatorname{arctg}(2x)$.

(d) $y = \frac{\operatorname{sen}(3x)}{\operatorname{arctg}(4x)}$.

(e) $y = e^{3x} \arcsen(2x)$.

Exercícios Complementares

C1. Verifique que

$$\frac{d}{dx} \left[x \arcsen x + \sqrt{1-x^2} \right] = \arcsen x.$$

C2. Verifique que

$$\frac{d}{dx} \left[x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \right] = \operatorname{arctg} x.$$

C3. Seja $y = \sqrt{x}$ para $x \geq 0$. Escreva $y^2 = x$ e derive implicitamente para confirmar que $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ para $x > 0$. Aplique o processo análogo à função $y = \ln x$, para $x > 0$, para confirmar que $y' = \frac{1}{x}$ para $x > 0$.

C4. Seja $R > 0$ um número real fixado. Mostre que

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{1}{2} \left(R^2 \arcsen \left(\frac{x}{R} \right) + x \sqrt{R^2 - x^2} \right) \right] = \sqrt{R^2 - x^2}.$$

C5. A derivada da função inversa escrita na notação de Leibniz (última linha da tabela do exercício **P1.**) pode confundir um pouco a nossa cabeça pois nem aparece uma função inversa efetivamente na fórmula. A explicação para isso é que essa fórmula está adaptada para a situação que normalmente usamos em problemas aplicados. Imagine um objeto cuja velocidade em função do tempo é dada por $v(t) = 5e^{-2t}$.

(a) Calcule $\frac{dv}{dt}$.

(b) Isole t e determine $t(v)$.

(c) Calcule $\frac{dt}{dv}$.

(d) A resposta do item (a) para $\frac{dv}{dt}$ ficou em função de t , enquanto a resposta do item (c) para $\frac{dt}{dv}$ ficou em função de v . Como sabemos que v e t estão relacionados pela função do enunciado ou pela resposta ou item (b), podemos escrever $\frac{dv}{dt}$ em função de v e $\frac{dt}{dv}$ em função de t . Use alguma dessas escritas para confirmar que $\frac{dt}{dv} = \frac{1}{dv/dt}$.



Cálculo 1 (MTM3101 e MTM3110)

Gabarito parcial da Lista 2.9

Derivada da função inversa

Última atualização: 25 de maio de 2022.

Exercícios Principais

P1.

(a) $f'(x) = -\frac{1}{x^2} \sqrt{\frac{-x^2}{8x^2 + 6x + 1}}.$

(b) $f'(x) = -\frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-2x^2}}$

(c) $f'(x) = 2x \operatorname{arctg}(2x) + \frac{2x^2}{1+4x^2}.$

(d) $y' = \frac{3(1+16x^2)\cos(3x)\operatorname{arctg}(4x) - 4\sin(3x)}{(1+16x^2)(\operatorname{arctg}(4x))^2}.$

(e) $y' = e^{3x} \left[3 \operatorname{arcsen}(2x) + \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}} \right].$

Exercícios Complementares

C1. Veja que, usando a regra do produto, temos

$$\frac{d}{dx}(x \operatorname{arcsen} x) = \operatorname{arcsen} x + x \frac{d}{dx} \operatorname{arcsen} x.$$

Pela derivada da função inversa, temos

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arcsen} x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

e, portanto,

$$\frac{d}{dx}(x \operatorname{arcsen} x) = \operatorname{arcsen} x + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}. \quad (1)$$

Ainda mais

$$\frac{d}{dx} \sqrt{1-x^2} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}. \quad (2)$$

Somando as expressões em (1) e (2), obtemos o resultado.

C2.

C3.

C4.

C5.

(a) $\frac{dv}{dt} = -10e^{-2t}.$

(b) $t(v) = -\frac{\ln(v/5)}{2}.$

(c) $\frac{dt}{dv} = -\frac{1}{2v}.$

(d)