Universidade Federal de Santa Catarina
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas
Departamento de Matemática

Cálculo 1 (MTM3101 e MTM3110)

Lista 2.10 - Derivadas de ordens superiores

Última atualização: 25 de maio de 2022.

Exercícios Principais

P1. Nos itens abaixo, calcule a derivada até a ordem n indicada.

(a) $f(x) = 3x^4 - 2x$, $n = 5$.

(b) $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $n = 3$.

(c) $f(x) = 3 - 2x^2 + 4x^5$, $n = 10$.

(d) $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$, $n = 4$.

(e) $f(x) = e^{2x+1}$, $n = 2$.

(f) $f(x) = \dfrac{1}{e^x}$, $n = 4$.

(g) $f(x) = \operatorname{sen}(ax)$, $n = 7$.

P2. Mostre que se $f(x) = e^{ax}$, então $f^{(n)}(x) = a^n e^{ax}$.

P3. A equação do movimento de um objeto é dada por $s(t) = 2t^3 - 3t^2 - 12t$, $t \geq 0$, em que s está em metros e t em segundos.

(a) Determine a velocidade $v(t)$ em m/s.

(b) Determine a aceleração $a(t)$ em m/s^2.

(c) Determine a aceleração no instante $t = 1\,s$.

(d) Determine a aceleração no(s) instante(s) em que a velocidade é igual a 0.

P4. Encontre os valores de λ para os quais $y = e^{\lambda x}$ satisfaz a equação $y'' - 3y' + 2y = 0$.

P5. Encontre $b > 0$ para que $y(x) = e^{6x}\cos(bx)$ seja solução da equação diferencial $y'' - 12y' + 45y = 0$.

P6. Determine $A, B, C \in \mathbb{R}$ para que a função $y(x) = Ax^2 + Bx + C$ seja solução da equação diferencial $3y'' + 8y' + 4y = -2x^2 + 3x$.

Observação. Nos próximos exercícios você vai aplicar as leis físicas para encontrar equações de movimento em situações comuns na Física. Caso você não saiba fazer, consulte os gabaritos iniciais.

P7. **[Movimento retilíneo uniforme.]** O movimento retilíneo uniforme (MRU) é caracterizado por um movimento que não possui aceleração, em outras palavras, $a(t) = 0$. Fixando condições iniciais $s(0) = s_0$ e $v(0) = v_0$, essa situação é matematicamente resumida por: determine a função $s(t)$ que satisfaz

$$\begin{cases} s''(t) = 0, \\ s(0) = s_0, \\ s'(0) = v_0. \end{cases}$$

(a) Mostre que, para quaisquer números A e B, a função $s(t) = A + Bt$ satisfaz $s''(t) = 0$.

(b) Mostre que, para $s(t) = A + Bt$ satisfazer $s(0) = s_0$ e $s'(0) = v_0$, então $s(t) = s_0 + v_0 t$.

(c) Determine $v(t)$ para a função obtida no item anterior para confirmar que, em um movimento em que a aceleração é igual a 0, a velocidade é constante.

P8. **[Movimento retilíneo uniformemente variado.]** O movimento retilíneo uniformemente variado (MRUV) é caracterizado por uma aceleração constante, isto é, $a(t) = a$. Atribua as condições iniciais $s(0) = s_0$ e $v(0) = v_0$.

(a) Mostre que essa situação pode ser descrita por encontrar uma função $s(t)$ que satisfaz

$$\begin{cases} s''(t) = a, \\ s(0) = s_0, \\ s'(0) = v_0. \end{cases}$$

(b) Mostre que, para quaisquer números A e B, a função $s(t) = A + Bt + \frac{1}{2}at^2$ satisfaz $s''(t) = a$.

(c) Mostre que, para $s(t) = A+Bt+\frac{1}{2}at^2$ satisfazer $s(0) = s_0$ e $s'(0) = v_0$, então $s(t) = s_0+v_0t+\frac{1}{2}at^2$.

(d) Mostre que $v(t) = v_0 + at$.

P9. Considere um movimento em que a aceleração é dada por $a(t) = a_0 + kt$ e atribua as condições iniciais $s(0) = s_0$ e $v(0) = v_0$.

(a) Mostre que essa situação pode ser descrita por encontrar uma função $s(t)$ que satisfaz

$$\begin{cases} s''(t) = a_0 + kt, \\ s(0) = s_0, \\ s'(0) = v_0. \end{cases}$$

(b) Mostre que, para quaisquer números A e B, a função $s(t) = A + Bt + \frac{1}{2}a_0t^2 + \frac{1}{6}kt^3$ satisfaz $s''(t) = a_0 + kt$.

(c) Mostre que, para $s(t) = A + Bt + \frac{1}{2}a_0t^2 + \frac{1}{6}kt^3$ satisfazer $s(0) = s_0$ e $s'(0) = v_0$, então $s(t) = s_0 + v_0t + \frac{1}{2}a_0t^2 + \frac{1}{6}kt^3$.

(d) Mostre que $v(t) = v_0 + a_0t + \frac{1}{2}kt^2$.

Exercícios Complementares

C1. Determine a derivada de ordem 100 das funções abaixo.

(a) $f(x) = \operatorname{sen} x$. **(b)** $f(x) = \cos x$.

C2. Mostre que $y = e^x \cos x$ satisfaz a equação $y'' - 2y' + 2y = 0$.

C3. Um cabo pendurado entre dois postes toma a forma de uma curva que é o gráfico de uma função $y(x)$ que satisfaz a equação diferencial

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\rho g}{T}\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2},$$

em que ρ é a densidade linear (massa por unidade de comprimento) do cabo, g é a aceleração da gravidade e T é a tensão do cabo no ponto mais baixo. Mostre que a função $y(x) = \dfrac{T}{\rho g}\cosh\left(\dfrac{\rho g\, x}{T}\right)$ é uma solução da equação diferencial acima.

C4. **[Queda livre com resistência do ar.]** Considere um objeto de massa m que é largado em queda livre numa situação em que a força de resistência que o ar oferece é diretamente proporcional à velocidade do objeto com constante de proporcionalidade k.

(a) Coloque a origem do eixo de coordenadas na posição inicial do objeto e com sentido positivo na direção do movimento. Use a segunda lei de Newton para concluir que $ma(t) = mg - kv(t)$.

(b) Mostre que essa situação pode ser descrita por encontrar uma função $s(t)$ que satisfaz

$$\begin{cases} ms''(t) = mg - ks'(t), \\ s(0) = 0, \\ s'(0) = 0. \end{cases}$$

(c) Mostre que, para quaisquer números A e B, a função $s(t) = Ae^{-\frac{kt}{m}} + B + \frac{mg}{k}t$ satisfaz a equação $ms''(t) = mg - ks'(t)$.

(d) Mostre que, para $s(t) = Ae^{-\frac{kt}{m}} + B + \frac{mg}{k}t$ satisfazer $s(0) = 0$ e $s'(0) = 0$, então $s(t) = \frac{mg}{k}t - \frac{m^2g}{k^2}(1 - e^{-\frac{kt}{m}})$.

(e) Mostre que $v(t) = \frac{mg}{k}(1 - e^{-\frac{kt}{m}})$.

C5. **[Sistema massa-mola ideal.]** Considere um sistema massa-mola sem atrito em que a massa do sistema é m e a constante de elasticidade da mola é k.

(a) Coloque a origem do eixo de coordenadas na posição de repouso do sistema e use a segunda lei de Newton e a lei de Hooke para para concluir que $ma(t) = -ks(t)$.

(b) Assuma posição inicial e velocidade inicial são s_0 e v_0, respectivamente, e mostre que essa situação pode ser descrita por encontrar uma função $s(t)$ que satisfaz

$$\begin{cases} ms''(t) = -ks(t), \\ s(0) = s_0, \\ s'(0) = v_0. \end{cases}$$

(c) Mostre que, para quaisquer números A e B, a função $s(t) = A\cos(\omega t) + B\,\mathrm{sen}(\omega t)$ satisfaz $ms''(t) = -ks(t)$, em que $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

(d) Mostre que, para $s(t) = A\cos(\omega t) + B\,\mathrm{sen}(\omega t)$ satisfazer $s(0) = s_0$ e $s'(0) = v_0$, então $s(t) = s_0\cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega}\,\mathrm{sen}(\omega t)$.

(e) Mostre que $v(t) = v_0\cos(\omega t) - s_0\omega\,\mathrm{sen}(\omega t)$.

(f) Determine $s(t)$ para $s_0 = 0$ e $v_0 = 0$. Interprete o resultado fisicamente.

(g) Determine $s(t)$ para $s_0 = L > 0$ e $v_0 = 0$. Interprete o resultado fisicamente.

Universidade Federal de Santa Catarina
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas
Departamento de Matemática

Cálculo 1 (MTM3101 e MTM3110)

Gabarito parcial da Lista 2.10

Derivadas de ordens superiores

Última atualização: 25 de maio de 2022.

Exercícios Principais

P1.

(a) $f'(x) = 12x^3 - 2$; $f''(x) = 36x^2$; $f^{(3)}(x) = 72x$; $f^{(4)}(x) = 72$; $f^{(5)}(x) = 0$.

(b) $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$; $f''(x) = 6ax + 2b$; $f^{(3)}(x) = 6a$.

(c) $f'(x) = -4x + 20x^4$; $f''(x) = -4 + 80x^3$; $f^{(3)} = 240x^2$; $f^{(4)}(x) = 480x$; $f^{(5)}(x) = 480$; $f^{(k)}(x) = 0$ para $k \geq 6$.

(d) $f'(x) = -\dfrac{1}{(x-1)^2}$; $f''(x) = \dfrac{2}{(x-1)^3}$; $f^{(3)}(x) = -\dfrac{6}{(x-1)^4}$; $f^{(4)}(x) = \dfrac{24}{(x-1)^5}$.

(e) $f'(x) = 2e^{2x+1}$; $f''(x) = 4e^{2x+1}$.

(f) $f'(x) = -\dfrac{1}{e^x}$; $f''(x) = \dfrac{1}{e^x}$; $f^{(3)}(x) = -\dfrac{1}{e^x}$; $f^{(4)}(x) = \dfrac{1}{e^x}$.

(g) $f'(x) = a\cos(ax)$; $f''(x) = -a^2\,\mathrm{sen}(ax)$; $f^{(3)}(x) = -a^3\cos(ax)$; $f^{(4)}(x) = a^4\,\mathrm{sen}(ax)$; $f^{(5)}(x) = a^5\cos(ax)$; $f^{(6)}(x) = -a^6\,\mathrm{sen}(ax)$; $f^{(7)}(x) = -a^7\cos(ax)$.

P2.

P3.

(a) $v(t) = 6t^2 - 6t - 12\ m/s$.

(b) $a(t) = 12t - 6\ m/s^2$.

(c) $a(1) = 6\,m/s^2$.

(d) $a(2) = 18\,m/s^2$.

P4. $\lambda = 1$ ou $\lambda = 2$.

P5. $b = 3$.

P6. $A = -\frac{1}{2}$, $B = \frac{11}{4}$ e $C = -\frac{19}{4}$.

P7.

(a) $s'(t) = B$ e $s''(t) = 0$.

(b) Como $s(0) = A = s_0$ e $s'(0) = B = v_0$, então $s(t) = s_0 + v_0 t$.

(c) $v(t) = s'(t) = v_0$, indicando que a velocidade é igual à velocidade inicial em todo o movimento.

P8.

(a) Basta lembrar que a aceleração é a derivada segunda de s.

(b) $s'(t) = B + at$ e $s''(t) = a$.

(c) Como $s(0) = A = s_0$ e $s'(0) = B = v_0$, então $s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$.

(d) $v(t) = s'(t) = v_0 + at$.

P9.

(a) Basta lembrar que a aceleração é a derivada segunda de s.

(b) $s'(t) = B + a_0 t + \frac{1}{2}kt^2$ e $s''(t) = a_0 + kt$.

(c) Como $s(0) = A = s_0$ e $s'(0) = B = v_0$, então $s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}a_0 t^2 + \frac{1}{6}kt^3$.

(d) $v(t) = s'(t) = v_0 + a_0 t + \frac{1}{2}kt^2$.

Exercícios Complementares

C1.

(a) $f^{(100)}(x) = \operatorname{sen} x$.

(b) $f^{(100)}(x) = \cos x$.

C2. $y' = (\cos x - \operatorname{sen} x)e^x$ e $y'' = -2e^x \operatorname{sen} x$. Assim,

$$y'' - 2y' + 2y = -2e^x \operatorname{sen} x - 2(\cos x - \operatorname{sen} x)e^x + 2e^x \cos x = 0.$$

C3.

C4.

(a) A segunda lei de Newton nos diz que, para cada instante de tempo t, a força resultante que atua no objeto é igual ao produto de sua massa (que é constante) pela aceleração, isto é, $F(t) = ma(t)$ para cada t. Assim, devemos descrever as forças que atuam sobre o objeto em um instante de tempo genérico t. Durante o movimento do objeto, duas forças atuam: (1) a força peso que é constante durante todo o movimento, possui módulo igual a mg e aponta para baixo (como usamos o sentido para baixo como positivo, então usaremos mg em nossas contas) e (2) a força de resistência do ar que tende a frear o objeto, tem módulo $kv(t)$ (essa informação foi passada no enunciado) e tem sentido para cima (portanto usaremos $-kv(t)$ em nossas contas). Com isso, a força resultante é $F(t) = mg - kv(t)$. Usando a segunda lei de Newton, obtemos $ma(t) = F(t) = mg - kv(t)$. Essa equação junto com as condições iniciais tem o poder de descrever todo o movimento.

(b) Basta substituir aceleração por derivada segunda da posição, velocidade por derivada primeira da posição e observar que, segundo o enunciado, o objeto é largado, indicando que a velocidade inicial é 0.

(c) $s'(t) = -\frac{Ak}{m}e^{-\frac{kt}{m}} + \frac{mg}{k}$ e $s''(t) = \frac{Ak^2}{m^2}e^{-\frac{kt}{m}}$. Assim,

$$mg - ks'(t) = mg - k\left(-\frac{Ak}{m}e^{-\frac{kt}{m}} + \frac{mg}{k}\right) = \frac{Ak^2}{m}e^{-\frac{kt}{m}} = ms''(t).$$

(d) Como $s(0) = A + B = 0$ e $s'(0) = -\frac{Ak}{m} + \frac{mg}{k} = 0$, então $A = \frac{m^2 g}{k^2}$ e $B = -\frac{m^2 g}{k^2}$. Substituindo em $s(t)$, obtemos $s(t) = \frac{mg}{k}t - \frac{m^2 g}{k^2}(1 - e^{-\frac{kt}{m}})$.

(e) $v(t) = s'(t) = \frac{mg}{k}(1 - e^{-\frac{kt}{m}})$.

C5.

(a) Assumindo que o sistema está sobre uma superfície em que a força peso e a normal se cancelam, então em um instante de tempo qualquer do movimento do sistema apenas a força elástica da mola atua (lembre que estamos desconsiderando o atrito). Pela lei de Hooke, a força exercida pela mola (mola ideal com deformação dentro da região em que a lei de Hooke se aplica) é proporcional à deformação da mola, de módulo $ks(t)$. Como essa força atua sempre em sentido contrário à posição (mola contraída: posição negativa e força positiva; mola estendida: posição positiva e força negativa), então a força resultante do sistema é $F(t) = -ks(t)$. Agora, aplicando a segunda lei de Newton, obtemos $ma(t) = F(t) = -ks(t)$.

(b) Basta substituir a aceleração pela derivada segunda da posição.

(c) $s'(t) = -A\omega \operatorname{sen}(\omega t) + B\omega \cos(\omega t)$ e $s''(t) = -A\omega^2 \cos(\omega t) - B\omega^2 \cos(\omega t)$. Observe que $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ e, portanto, $m\omega^2 = k$. Assim,

$$ms''(t) = m\left[-A\omega^2 \cos(\omega t) - B\omega^2 \cos(\omega t)\right] = -m\omega^2\left[A\cos(\omega t) + B\cos(\omega t)\right] = -ks(t).$$

(d) Como $s(0) = A = s_0$ e $s'(0) = B\omega = v_0$, então $s(t) = s_0 \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega} \operatorname{sen}(\omega t)$.

(e) $v(t) = s'(t) = v_0 \cos(\omega t) - s_0\omega \operatorname{sen}(\omega t)$.

(f) $s(t) = 0$. Em um sistema massa-mola em que a posição inicial é a de repouso da mola e o sistema está parado, então continuará parado pois não há forças atuando.

(g) $s(t) = L\cos(\omega t)$. A posição inicial indica que a mola foi esticada até a posição L e a equação de movimento indica que o sistema oscilará entre as posições $-L$ e L indefinidamente.