Universidade Federal de Santa Catarina
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas
Departamento de Matemática

Cálculo 1 (MTM3101 e MTM3110)

Lista 3.2 - Taxa de variação

Última atualização: 6 de julho de 2022.

Exercícios Principais

P1. Um fabricante produz peças de tecido. O custo, em reais, da produção de x metros de um certo tecido é $C(x)$.

(a) Qual é o significado de $C'(x)$? Qual é a unidade de medida de $C'(x)$?

(b) O que significa dizer que $C'(500) = 10$?

P2. A posição de uma partícula sobre uma linha reta graduada em metros no instante t segundos, é dada por $s(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$.

(a) Determine $v(t)$.

(b) Determine $a(t)$.

(c) Em quais instantes a partícula está em repouso?

(d) Quando a partícula está se movendo para frente? E quando está se movendo para trás?

(e) Qual é o deslocamento da partícula entre os instantes 0 e 5 s?

(f) Qual é a distância percorrida pela partícula entre os instantes 0 e 5 s?

(g) Para que valores de t tem-se $a(t) = 0$? Para quais valores de t tem-se $a(t) < 0$? Para quais valores de t tem-se $a(t) > 0$?

(h) Quando a partícula está acelerando ou freando (isto é, quando está aumentando ou diminuindo sua velocidade em módulo)?

P3. A quantidade de carga Q, medida em coloumbs, que passou por um determinado ponto em um fio até o instante t segundos é dada por $Q(t) = ke^{-at}\cos(\omega t)$, em que k, a, b e ω são constantes. Determine a corrente neste ponto do fio no instante t. Quais são as unidades de medida da corrente encontrada?

P4. A Lei da Gravitação de Newton diz que a intensidade F da força exercida por um corpo de massa m_1 sobre um corpo de massa m_2 é dada por $F = \dfrac{Gm_1m_2}{r^2}$, em que G é a constante gravitacional e r é a distância entre os corpos. Calcule dF/dr e interprete seu significado. O que o sinal de menos indica?

P5. O número de células de levedura em uma cultura de laboratório é dado por

$$n(t) = \frac{a}{1 + be^{-0{,}7t}},$$

em que t é medido em horas e a e b são constantes. Sabe-se que no tempo $t = 0$ a população é 20 células e que está crescendo a uma taxa de 12 células/hora. Encontre a e b e diga o que acontece com a população da levedura após muito tempo.

P6. Um caminhão descarrega areia a uma taxa de $3\,m^3/\text{min}$ de tal forma que a areia descarregada tem um formato de cone em que a altura é igual ao diâmetro da base. Determine a taxa de crescimento da altura da pilha quando a altura é igual a $3\,m$.

P7. Quando dois resistores de resistências R_1 e R_2 são conectados em paralelo, então a resistência equivalente R é calculada por

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}.$$

Se as taxas de variação de R_1 e R_2 são $0{,}3\,\Omega/s$ e $0{,}2\,\Omega/s$ respectivamente, qual é a taxa de variação de R quando $R_1 = 80\,\Omega$ e $R_2 = 100\,\Omega$?

P8. Uma escada de $8\,m$ está encostada em uma parede. Se a extremidade inferior da escada for afastada do pé da parede a uma velocidade constante de $2\,m/s$, com que velocidade a extremidade superior estará descendo no instante em que a inferior estiver a $3\,m$ da parede?

P9. Uma partícula se desloca ao longo da parábola $y = x^2$ no primeiro quadrante de modo que sua coordenada x (medida em metros) aumente a uma velocidade constante de $10\,m/s$. Qual é a taxa de variação em relação ao tempo do ângulo de inclinação θ da reta que liga a partícula à origem quando $x = 3\,m$.

Exercícios Complementares

C1. Um homem anda ao longo de um caminho reto no plano, sobre o eixo y e no sentido y positivo, a uma velocidade de $2\,m/s$. Um holofote, que está localizado sobre o eixo x positivo a $20\,m$ da origem, focaliza o homem. Seja θ o menor ângulo que o holofote faz com o eixo x. Qual é a taxa de variação de θ com relação ao tempo quando o homem está a $20\,m$ da origem?

C2. Quando um prato circular de metal é aquecido em um forno, seu raio aumenta a uma taxa (isto é, a derivada do raio com relação ao tempo) de $0{,}01\,cm/min$. Qual é a taxa de variação da área do prato quando seu raio é $50\,cm$?

C3. Uma quantidade bastante conhecida na Física é o *momento*, que é dado pelo produto da massa pela velocidade: $p = mv$. A força agindo sobre o objeto é a taxa de variação do momento em relação ao tempo: $F = dp/dt$. Assumindo a massa do objeto como constante, temos $F = d(mv)/dt = mdv/dt = ma$, que é a Segunda Lei de Newton. No contexto de mecânica relativística, a massa do objeto não é constante e varia conforme sua velocidade: $m = m_0/\sqrt{1 - v^2/c^2}$, em que m_0 é a massa de partícula em repouso e c é a velocidade da luz. Usando que $F = dp/dt$ e que a massa varia conforme a mecânica relativística, mostre que

$$F = \frac{m_0 a}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}}.$$

C4. No estudo de ecossistemas, o modelo predador-presa é muitas vezes usado para estudar a interação entre espécies. Seja $T(t)$ o número de tigres de uma região no instante de tempo t (medido em anos) e seja $A(t)$ o número de antílopes na mesma região no instante t. A interação entre essas duas espécies é modelada pelas equações

$$A'(t) = aA(t) - bA(t)T(t) \quad \text{e} \quad T'(t) = -cT(t) + dA(t)T(t),$$

em que a, b, c e d são constantes.

(a) Como caracterizar matematicamente a afirmação de que o número de indivíduos das duas espécies é constante ao longo do tempo?

(b) Como caracterizar matematicamente a extinção dos antílopes?

(c) Considere $a = 0{,}05$, $b = 0{,}001$, $c = 0{,}05$ e $d = 0{,}0001$. Sabendo que as espécies estão convivendo em equilíbrio (isto é, o número de indivíduos é constante ao longo do tempo) e que não estão extintas, determine o número de indivíduos de cada espécie.

C5. É muito comum falarmos em taxa de crescimento usando porcentagens: por exemplo, a população cresce 1% ao ano. Essa medida é uma medida relativa comparada ao seu valor prévio: a população do ano seguinte é 1% maior que a população do ano atual. Apesar de não parecer, essa afirmação pode ser traduzida matematicamente usando a noção de taxa de variação média: se $P(t)$ é a população no ano t, então essa afirmação pode ser escrita como

$$\frac{P(t+1) - P(t)}{(t+1) - t} = 0{,}01P(t).$$

O denominador da fração do lado esquerdo é 1, mas colocamos na forma de $(t+1) - t$ para ilustrar o quociente que representa a taxa de variação média. E se a informação da taxa de crescimento relativa não for "média", mas sim "instantânea"? Neste caso, o lado esquerdo da igualdade é trocado por $P'(t)$ e ficamos com

$$P'(t) = 0{,}01P(t).$$

(a) Mostre que $P(t) = P_0 e^{0{,}01t}$, em que P_0 é a população no instante de tempo 0, é solução da equação acima.

(b) Mostre que $P(t) = P_0 e^{kt}$, em que P_0 é a população no instante de tempo 0, é solução da equação $P'(t) = kP(t)$.

(c) Justifique a afirmação: "Em uma população modelada pela função $P(t) = 10000e^{0{,}005t}$, em que t é medido em anos, a taxa de crescimento anual é 0,5%."

(d) Determine a taxa de crescimento anual de uma população que cresce proporcionalmente ao seu tamanho e que, em 10 anos, saltou de 2,56 bilhões para 3,04 bilhões de habitantes.

C6. Cada lado de um quadrado está aumentando a uma taxa de $6\,cm/s$. A que taxa a área do quadrado está aumentando quando a área do quadrado é $16\,cm^2$?

C7. Um tanque cilíndrico com raio $5\,m$ está sendo enchido com água a uma taxa de $3\,m^3/\text{min}$. Qual é a taxa de crescimento da altura da água no tanque?

Universidade Federal de Santa Catarina
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas
Departamento de Matemática

Cálculo 1 (MTM3101 e MTM3110)

Gabarito da Lista 3.2

Taxa de variação

Última atualização: 6 de julho de 2022.

Exercícios Principais

P1.

- **(a)** $C'(x)$ representa a taxa com que o custo de produção varia quando a produção é de x metros. A unidade de medida de $C'(x)$ é R$/m$. *Observação.* Na economia, a derivada do custo $C'(x)$ é chamada de custo marginal. Definições análogas se aplicam à receita marginal e ao lucro marginal.
- **(b)** Significa que, quando a produção está em $500\,m$, a taxa de variação do custo é 10 R$/m$. Usando aproximações por diferenciais, isso também significa dizer que o custo de produção do 501º metro é, aproximadamente, R$ 10,00.

P2.

- **(a)** $v(t) = s'(t) = 3t^2 - 12t + 9$.
- **(b)** $a(t) = v'(t) = s''(t) = 6t - 12$.
- **(c)** $t = 1\,s$ e $t = 3\,s$.
- **(d)** A partícula se move para frente quando $0 \leq t < 1\,s$ ou $t > 3\,s$. A partícula se move para trás quando $1\,s < t < 3\,s$.
- **(e)** $20\,m$.
- **(f)** $28\,m$.
- **(g)** $a(t) = 0$ se $t = 2\,s$, $a(t) < 0$ se $0 \leq t < 2\,s$ e $a(t) > 0$ se $t > 2\,s$.
- **(h)** Freia quando $0 \leq t < 1\,s$ ou $2\,s < t < 3\,s$; acelera quando $1\,s < t < 2\,s$ ou $t > 3\,s$.

P3. $I(t) = Q'(t) = -k(a\cos(\omega t) + \omega\,\mathrm{sen}(\omega t))e^{-at}$. A corrente, sendo a taxa de variação da carga pelo tempo, é medida neste exemplo em C/s; esta unidade C/s recebe o nome de ampere (A).

P4. $dF/dr = -\dfrac{2Gm_1m_2}{r^3}$ indica a taxa de variação da força de atração entre os corpos quando a distância é r. O sinal de menos indica que quanto maior a distância, menor a força.

P5. $a = 140$ e $b = 6$. Como o $\lim\limits_{t\to\infty} n(t) = a = 140$, então o número de células tende a estabilizar em 140 células.

P6. $4/(3\pi)\,m/\text{min}$.

P7. $dR/dt = \dfrac{107}{810}\,\Omega/s \cong 0{,}132\,\Omega/s$.

P8. $-\dfrac{6}{\sqrt{55}}\, m/s.$

P9. $\dfrac{d\theta}{dt} = 1\,\text{rad}/s.$

Exercícios Complementares

C1. $\dfrac{d\theta}{dt} = \dfrac{1}{20}\,\text{rad}/s.$

C2. $\dfrac{dA}{dt} = \pi\, cm^2/min.$

C3.

C4.

- **(a)** $A(t)$ e $T(t)$ são constantes ao longo do tempo ou, equivalentemente, $A'(t) = 0$ e $T'(t) = 0$ para todo t.
- **(b)** $A(t) = 0$ para algum valor de t (e, consequentemente, para todo t a partir deste, a menos que haja imigração de outra região).
- **(c)** 500 antílopes e 50 tigres.

C5.

- **(a)** $P(0) = P_0 e^0 = P_0$ e $P'(t) = 0{,}01 P_0 e^{0{,}01t} = 0{,}01 P(t).$
- **(b)** $P(0) = P_0 e^0 = P_0$ e $P'(t) = kP_0 e^{kt} = kP(t).$
- **(c)**
- **(d)** $k = \dfrac{1}{10} \ln\left(\dfrac{3{,}04}{2{,}56}\right) \cong 0{,}017 = 1{,}7\%.$

C6. $48\, cm^2/s.$

C7. $3/(25\pi)\, m/\text{min}.$