Universidade Federal de Santa Catarina
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas
Departamento de Matemática

Cálculo 1 (MTM3101 e MTM3110)

Lista 3.6 - Critérios para determinar máximos e mínimos

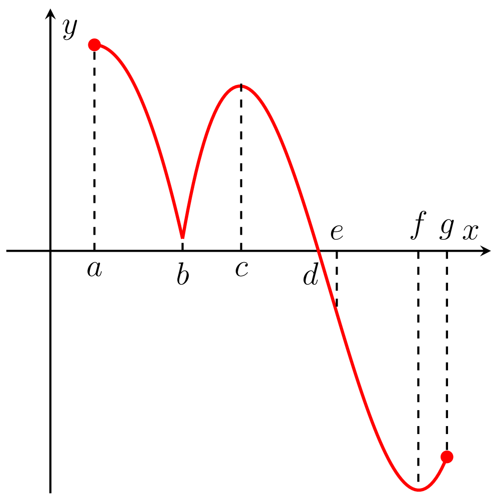
Última atualização: 22 de junho de 2022.

Exercícios Principais

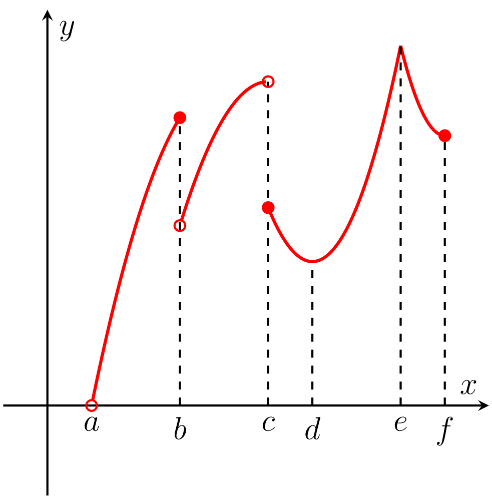
P1. Nos itens abaixo, para a função h cujo gráfico é mostrado, identifique todos os pontos críticos, os valores críticos e os pontos do domínio nos quais a derivada não existe.

(a)

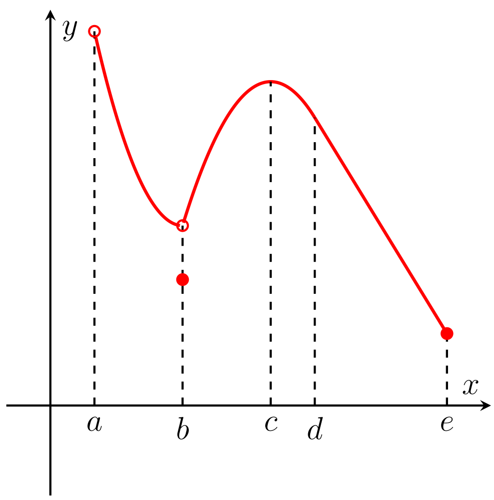
(b)



(c)



(d)



P2. Em cada item, determine os pontos críticos.

(a) $f(x) = 3x - 5$.

(b) $f(x) = 3x^2 - 12x + 5$.

(c) $f(x) = x^3 - 3x + 1$.

(d) $f(x) = x^4$.

(e) $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 1$.

(f) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$.

(g) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - x + 1}$.

(h) $f(x) = x - \sqrt[3]{x}$.

(i) $f(x) = 2\cos x + \operatorname{sen} 2x$.

(j) $f(x) = x - 2\operatorname{arctg} x$.

(k) $f(x) = xe^{x/2}$.

(l) $f(x) = \ln(x^2 + x + 1)$.

P3. Determine os pontos críticos da função $f(x) = x^n(1-x)^m$, em que $m, n > 0$.

P4. Considere a função $f(x) = (x^2 + bx + c)e^x$. Sabe-se que -1 é o único ponto crítico de f. Determine b e c.

P5. Considere a função $f(x) = x^2 + bx + c$. Sabe-se que -3 é ponto crítico e que -16 é valor crítico de f. Determine b e c.

P6. Para cada item do exercício **P2.**, utilize o critério da derivada primeira para determinar se esses pontos críticos são pontos de máximo/mínimo locais ou nenhum dos dois.

P7. Repita o exercício acima, agora testando os pontos críticos pelo teste da derivada segunda.

P8. Em todos os itens abaixo, você já encontrou os pontos críticos no exercício **P2.** e já verificou se são máximos ou mínimos locais nos exercícios **P6.** e **P7.**. Determine o máximo/mínimo absoluto e o(s) ponto(s) de máximo/mínimo absoluto nos intervalos considerados.

(a) $f(x) = 3x - 5, \quad [-2, 3]$.

(b) $f(x) = 3x^2 - 12x + 5, \quad [0, 3]$.

(c) $f(x) = x^3 - 3x + 1, \quad [0, 3]$.

(d) $f(x) = x^4, \quad [-2, 2]$.

(e) $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 1, \quad [-2, 3]$.

(f) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}, \quad [\frac{1}{5}, 4]$.

(g) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - x + 1}, \quad [0, 3]$.

(h) $f(x) = x - \sqrt[3]{x}, \quad [-1, 4]$.

(i) $f(x) = 2\cos x + \operatorname{sen} 2x, \quad [0, \pi/2]$.

(j) $f(x) = x - 2\operatorname{arctg} x, \quad [0, 4]$.

(k) $f(x) = xe^{x/2}, \quad [-3, 1]$.

(l) $f(x) = \ln(x^2 + x + 1), \quad [-1, 1]$.

P9. Encontre dois números maiores ou iguais a 0 cuja soma é 16 e cujo produto é o maior possível.

P10. Um empresário deseja abrir uma pequena fábrica. Segundo um estudo feito por ele, se x funcionários forem contratados, seu lucro $L(x)$ anual em reais será de

$$L(x) = 90x^2 - x^3, \qquad 0 \leqslant x \leqslant 80.$$

O estudo considera a possibilidade de contratar até 80 funcionários. Quantos funcionários devem ser contratados para que o lucro anual seja o maior possível? E qual o valor desse lucro?

Exercícios Complementares

C1. Considere a função $f(x) = (x - 11)^5(x + 11)^6 + 8$.

(a) Sejam p_1, p_2, …, p_n todos os pontos críticos de f. Determine a soma $p_1 + p_2 + \cdots + p_n$.

(b) Sejam q_1, q_2, …, q_m todos os pontos de máximo/mínimo locais de f. Determine a soma $q_1 + q_2 + \cdots + q_m$.

C2. Um fio de comprimento m é cortado em dois pedaços. Com um deles se fará um círculo e com o outro um quadrado.

(a) Como devemos cortar o fio a fim de que a soma das duas áreas compreendidas pelas figuras seja mínima?

(b) Como devemos cortar o fio a fim de que a soma das duas áreas compreendidas pelas figuras seja máxima?

Universidade Federal de Santa Catarina
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas
Departamento de Matemática

Cálculo 1 (MTM3101 e MTM3110)

Gabarito da Lista 3.6

Critérios para determinar máximos e mínimos

Última atualização: 22 de junho de 2022.

Exercícios Principais

P1. Neste exercício e nos próximos, estamos usando que pontos críticos são os pontos em que a derivada é igual a 0. Uma outra definição usada em alguns livros é considerar pontos críticos os pontos do domínio da função em que a derivada é igual a 0 ou a derivada não existe.

(a) Os pontos críticos são -2, 0, 2 e 4. Os números críticos são $h(-2)$, $h(0)$, $h(2)$ e $h(4)$. Não há pontos nos quais a derivada não existe.

(b) Os pontos críticos são c e f. Os números críticos são $h(c)$ e $h(f)$. A derivada não existe em a, b e g. *Observação.* Nos pontos a e g, existem derivadas laterais à direita e à esquerda, respectivamente. Dependendo do livro, às vezes considera-se que a função é derivável nesses pontos pois eles são os extremos do seu domínio e h é derivável pelo lado em que é possível calcular a derivada.

(c) O ponto crítico é d. O número crítico é $h(d)$. A derivada não existe em b, c, e e f.

(d) O ponto crítico é c. O número crítico é $h(c)$. A derivada não existe em b e e.

P2.

(a) Não há.

(b) 2.

(c) -1 e 1.

(d) 0.

(e) -1, 0 e 2.

(f) -1 e 1.

(g) -1 e 1.

(h) $-\dfrac{1}{3\sqrt{3}}$ e $\dfrac{1}{3\sqrt{3}}$.

(i) $\dfrac{\pi}{6}+2k\pi$, $\dfrac{5\pi}{6}+2k\pi$ e $\dfrac{3\pi}{2}+2k\pi$, em que $k \in \mathbb{Z}$.

(j) -1 e 1.

(k) -2.

(l) $-\dfrac{1}{2}$.

P3. 0 é ponto crítico se $n > 1$. 1 é ponto crítico se $m > 1$. $\dfrac{n}{n+m}$ sempre é ponto crítico.

P4. $b = 0$ e $c = 1$.

P5. $b = 6$ e $c = -7$.

P6.

(a)

(b) 2 é ponto de mínimo local.

(c) 1 é ponto de mínimo local e -1 é ponto de máximo local.

(d) 0 é ponto de mínimo local.

(e) -1 e 2 são pontos de mínimo locais e 0 é ponto de máximo local.

(f) 1 é ponto de mínimo local e -1 é ponto de máximo local.

(g) -1 é ponto de mínimo local e 1 é ponto de máximo local.

(h) $\dfrac{1}{3\sqrt{3}}$ é ponto de mínimo local e $-\dfrac{1}{3\sqrt{3}}$ é ponto de máximo local.

(i) Para todo $k \in \mathbb{Z}$, $\dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi$ é ponto de mínimo local e $\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$ é ponto de máximo local. Para todo $k \in \mathbb{Z}$, $\dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi$ não é nem ponto de máximo nem ponto de mínimo.

(j) 1 é ponto de mínimo local e -1 é ponto de máximo local.

(k) -2 é ponto de mínimo local.

(l) $-\dfrac{1}{2}$ é ponto de mínimo local.

P7. As respostas estão no item anterior. Mas cabe ressaltar aqui que este método seria inconclusivo no item (d) e também nos pontos da forma $\dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi$ no item (i).

P8.

(a) Ponto de mínimo absoluto -2 e mínimo absoluto $f(-2) = -11$. Ponto de máximo absoluto 3 e máximo absoluto $f(3) = 4$.

(b) Ponto de mínimo absoluto 2 e mínimo absoluto $f(2) = -7$. Ponto de máximo absoluto 0 e máximo absoluto $f(0) = 5$.

(c) Ponto de mínimo absoluto 1 e mínimo absoluto $f(1) = -1$. Ponto de máximo absoluto 3 e máximo absoluto $f(3) = 19$.

(d) Ponto de mínimo absoluto 0 e mínimo absoluto $f(0) = 0$. Pontos de máximo absolutos -2 e 2 e máximo absoluto $f(-2) = f(2) = 16$.

(e) Ponto de mínimo absoluto 2 e mínimo absoluto $f(2) = -31$. Ponto de máximo absoluto -2 e máximo absoluto $f(-2) = 33$.

(f) Ponto de mínimo absoluto 1 e mínimo absoluto $f(1) = 2$. Ponto de máximo absoluto $\frac{1}{5}$ e máximo absoluto $f(\frac{1}{5}) = \dfrac{26}{5}$.

(g) Ponto de mínimo absoluto 0 e mínimo absoluto $f(0) = 0$. Ponto de máximo absoluto 1 e máximo absoluto $f(1) = 1$.

(h) Ponto de mínimo absoluto $\dfrac{1}{3\sqrt{3}}$ e mínimo absoluto $f(\frac{1}{3\sqrt{3}}) = -\dfrac{2}{3\sqrt{3}}$. Ponto de máximo absoluto 4 e máximo absoluto $f(4) = 4 - \sqrt[3]{4}$.

(i) Ponto de mínimo absoluto $\pi/2$ e mínimo absoluto $f(\pi/2) = 0$. Ponto de máximo absoluto $\pi/6$ e máximo absoluto $f(\pi/6) = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

(j) Ponto de mínimo absoluto 1 e mínimo absoluto $f(1) = 1 - \dfrac{\pi}{2}$. Ponto de máximo absoluto 4 e máximo absoluto $f(4) = 4 - 2\,\mathrm{arctg}(4)$.

(k) Ponto de mínimo absoluto -2 e mínimo absoluto $f(-2) = -\dfrac{2}{e}$. Ponto de máximo absoluto 1 e máximo absoluto $f(1) = e^{1/2}$.

(l) Ponto de mínimo absoluto $-\dfrac{1}{2}$ e mínimo absoluto $f(-\frac{1}{2}) = \ln(3/4)$. Ponto de máximo absoluto 1 e máximo absoluto $f(1) = \ln 3$.

P9. Ambos iguais a 8.

P10. 60 funcionários e o lucro anual será de R\$ 108.000,00.

Exercícios Complementares

C1.

(a) $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$

(b) $q_1 + q_2 + \cdots + q_m = -10$

C2.

(a) Para que a área seja mínima o pedaço usado para a circunferência deve medir $\dfrac{m\pi}{4+\pi}$ e o pedaço usado para o quadrado $m - \dfrac{m\pi}{4+\pi}$.

(b) Para que a área seja máxima o fio deve ser usado inteiramente para a circunferência. Vejamos, abaixo, a resolução completa desse exercício.

Dividimos o fio em duas partes, uma de tamanho x que será usada pra a circunferência (que terá um raio $r = \dfrac{x}{2\pi}$), e outra de tamanho $m - x$, que será usada para o quadrado (que terá lado $\ell = \dfrac{m-x}{4}$).

Assim a soma das áreas á dada por

$$A = \pi r^2 + \ell^2 = \frac{x^2}{4\pi} + \frac{(m-x)^2}{16},$$

a assim $A = A(x)$ á uma função de x, para $0 \leqslant x \leqslant m$. Aplicaremos o Método do Intervalo Fechado para a função $A(x)$.

Passo 1. Encontrar os pontos críticos de $A(x)$ em $(0, m)$.

Temos

$$A'(x) = \frac{x}{2\pi} - \frac{m-x}{8},$$

e assim $A'(x) = 0$ quando $x = \frac{m\pi}{4+\pi}$. Como $\pi < 4 + \pi$, segue que $\dfrac{\pi}{4+\pi} < 1$ e assim $0 < \dfrac{m\pi}{4+\pi} < m$. Em outras palavras, o ponto crítico encontrado está no intervalo considerado.

Passo 2. Temos $A(0) = \dfrac{m^2}{16}$, $A(m) = \dfrac{m^2}{4\pi}$ e

$$A\left(\frac{m\pi}{4+\pi}\right) = \frac{m^2}{4(4+\pi)}.$$

Como $4\pi < 16 < 4(4+\pi)$, segue que $\dfrac{1}{4(4+4\pi)} < \dfrac{1}{16} < \dfrac{1}{4\pi}$ e portanto $\dfrac{m^2}{4(4+4\pi)} < \dfrac{m^2}{16} < \dfrac{m^2}{4\pi}$, ou seja

$$A\left(\frac{m\pi}{4+\pi}\right) < A(0) < A(m).$$

Assim a função $A(x)$ tem máximo global em $x = m$ e mínimo global em $x = \dfrac{m\pi}{4+\pi}$. Isto é,

- a soma máxima das áreas é pegar todo o fio para a circunferência $(x = m)$,
- a soma mínima das áreas é cortar o fio no ponto $x = \dfrac{m\pi}{4+\pi}$ para fazer a circunferência e usar o restante, $m - x = \dfrac{4m}{4+\pi}$, para fazer o quadrado.