

Cálculo 1 (MTM3101 e MTM3110)

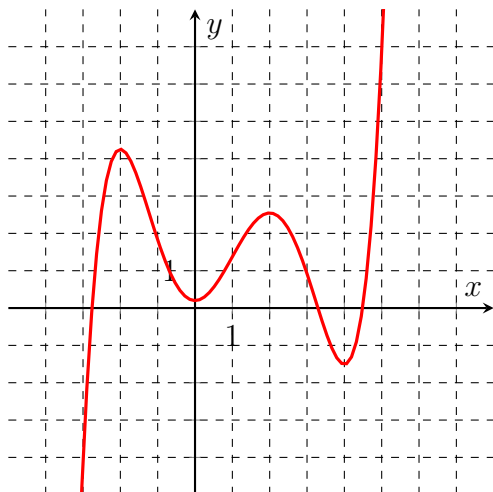
Lista 3.7 - Concavidade e pontos de inflexão

Última atualização: 22 de junho de 2022.

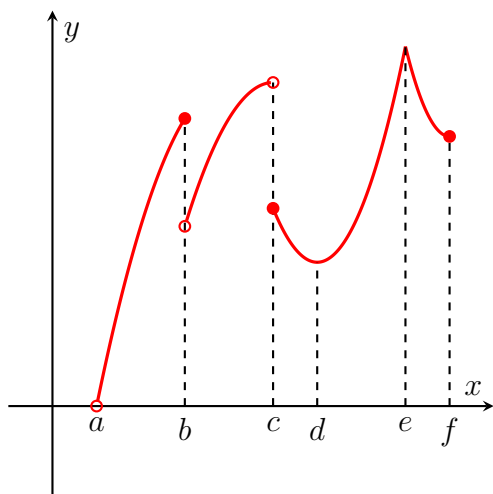
Exercícios Principais

P1. Nos itens abaixo, dado o gráfico da função h , determine as concavidades e os pontos de inflexão. Caso algum ponto necessário não esteja explicitamente marcado na figura, dê um nome a esse ponto e escreva sua resposta utilizando-o.

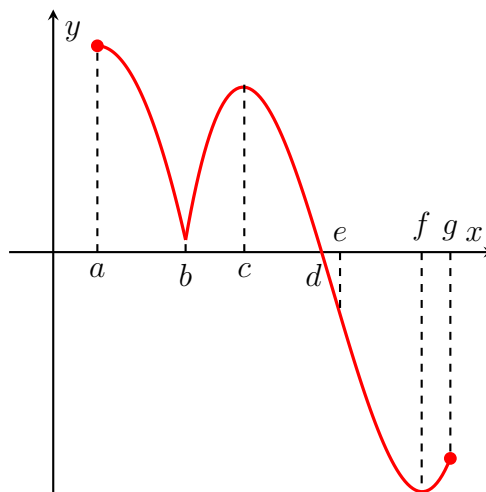
(a)



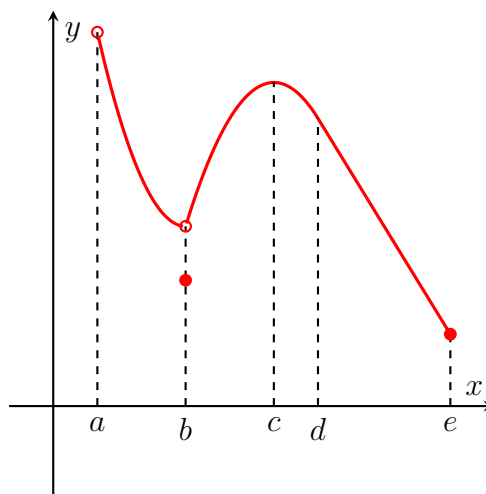
(c)



(b)



(d)



P2. Determinar as concavidades e os pontos de inflexão das funções abaixo.

(a) $f(x) = 3x - 5$.

(b) $f(x) = 3x^2 - 12x + 5$.

(c) $f(x) = x^3 - 3x + 1$.

(d) $f(x) = x^4$.

(e) $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 1$.

(f) $f(x) = x + \frac{1}{x}$.

(g) $f(x) = \frac{x}{x^2 - x + 1}$.

(h) $f(x) = x - \sqrt[3]{x}$.

(i) $f(x) = 2 \cos x + \sin 2x$.

(j) $f(x) = x - 2 \operatorname{arctg} x$.

(k) $f(x) = xe^{x/2}$.

(l) $f(x) = \ln(x^2 + x + 1)$.

P3. Um economista anunciou que os juros estão crescendo, mas a uma taxa decrescente. Interprete essa afirmação em termos de derivadas.



Cálculo 1 (MTM3101 e MTM3110)

Gabarito da Lista 3.7

Concavidade e pontos de inflexão

Última atualização: 22 de junho de 2022.

Exercícios Principais

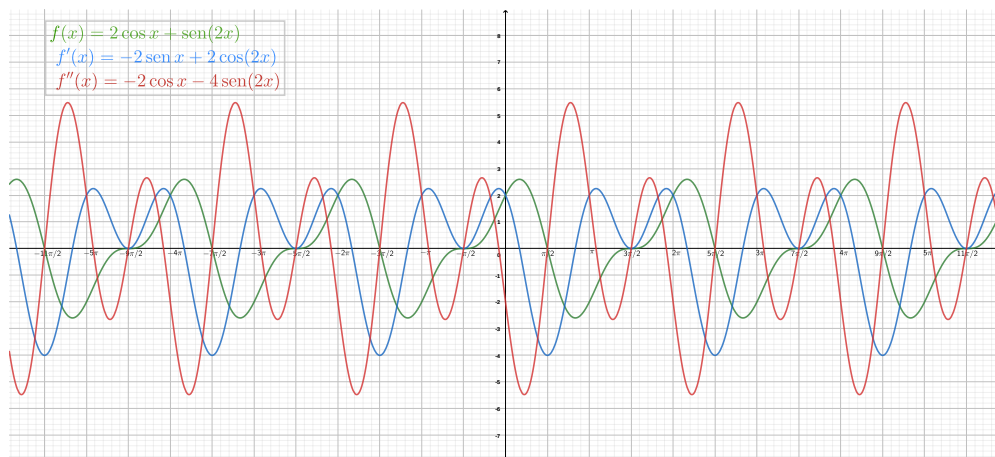
P1.

- (a) Os pontos de inflexão estão próximos de -1 , 1 e 3 , vamos chamá-los de a , b e c , respectivamente. h é convexa em $[a, b]$ e $[c, \infty)$. h é côncava em $(-\infty, a]$ e $[b, c]$.
- (b) O único ponto de inflexão é e . h é convexa em $[e, g]$. h é côncava em $[a, b]$ e $[b, e]$. Observe que mesmo sendo côncava em $[a, b]$ e $[b, e]$, h não é côncava em $[a, e]$.
- (c) Não há pontos de inflexão (em definições que não exigem nem continuidade para poder classificar pontos de inflexão, teríamos um ponto de inflexão em c , pois é côncava à esquerda e convexa à direita de c). h é convexa em $[c, e]$ e $[e, f]$. h é côncava em $(a, b]$ e (b, c) .
- (d) Não há pontos de inflexão (em definições que não exigem nem continuidade para poder classificar pontos de inflexão, teríamos um ponto de inflexão em b , pois é convexa à esquerda e côncava à direita de b). h é convexa em (a, b) . h é côncava em $[b, d]$. Em $[d, e]$, o gráfico de h é uma linha reta; nesses casos é comum dizer que h não possui concavidade neste intervalo.

P2.

- (a) Sem concavidades definidas e sem pontos de inflexão.
- (b) Convexa em $\mathbb{R}$ e sem pontos de inflexão.
- (c) Convexa em $[0, \infty)$, côncava em $(-\infty, 0]$ e ponto de inflexão em 0 .
- (d) Convexa em $\mathbb{R}$ e sem pontos de inflexão.
- (e) Convexa em $(-\infty, \frac{1-\sqrt{7}}{3}]$ e $[\frac{1+\sqrt{7}}{3}, \infty)$, côncava em $[\frac{1-\sqrt{7}}{3}, \frac{1+\sqrt{7}}{3}]$ e pontos de inflexão em $\frac{1-\sqrt{7}}{3}$ e $\frac{1+\sqrt{7}}{3}$.
- (f) Convexa em $(0, \infty)$, côncava em $(-\infty, 0)$ e sem pontos de inflexão.
- (g) Ao calcular a derivada segunda de f e após simplificar as contas, obtemos $f''(x) = \frac{2(x^3 - 3x + 1)}{(x^2 - x + 1)^3}$.
Fazer a análise de sinal dessa função não é uma tarefa simples. Com o auxílio de um software, descobrimos que $f''(x) = 0$ em $x_1 \cong -1,8794$, $x_2 \cong 0,3473$ e $x_3 \cong 1,5321$, que $f''(x) > 0$ em (x_1, x_2) e (x_3, ∞) e que $f''(x) < 0$ em $(-\infty, x_1)$ e (x_2, x_3) . De posse desses resultados, concluímos que f é convexa em $[x_1, x_2]$ e $[x_3, \infty)$, côncava em $(-\infty, x_1]$ e $[x_2, x_3]$ e com pontos de inflexão em x_1 , x_2 e x_3 .
- (h) Convexa em $[0, \infty)$, côncava em $(-\infty, 0]$ e sem pontos de inflexão.

- (i) Este exercício também não é tão fácil de resolver na mão. Você precisa saber resolver equações e inequações trigonométricas. Caso você tenha dificuldade com esse conteúdo, procure as videoaulas de Pré-cálculo em nosso material complementar. f é convexa em todos os intervalos da forma $[\pi/2 + 2k\pi, \pi + \arcsen(1/4) + 2k\pi]$ e $[3\pi/2 + 2k\pi, 2\pi - \arcsen(1/4) + 2k\pi]$ em que $k \in \mathbb{Z}$. f é côncava em todos os intervalos da forma $[-\arcsen(1/4) + 2k\pi, \pi/2 + 2k\pi]$ e $[\pi + \arcsen(1/4) + 2k\pi, 3\pi/2 + 2k\pi]$ em que $k \in \mathbb{Z}$. Os pontos de inflexão são todos os pontos da forma $\pi/2 + k\pi$, $\pi + \arcsen(1/4) + 2k\pi$ e $-\arcsen(1/4) + 2k\pi$, em que $k \in \mathbb{Z}$. Observe os gráfico de f , f' e f'' abaixo.



- (j) Convexa em $[0, \infty)$, côncava em $(-\infty, 0]$ e ponto de inflexão em 0.
- (k) Convexa em $[-4, \infty)$, côncava em $(-\infty, -4]$ e ponto de inflexão em -4 .
- (l) Convexa em $[-\frac{\sqrt{3}+1}{2}, \frac{\sqrt{3}-1}{2}]$, côncava em $(-\infty, -\frac{\sqrt{3}+1}{2}]$ e $[\frac{\sqrt{3}-1}{2}, \infty)$ e pontos de inflexão em $-\frac{\sqrt{3}+1}{2}$ e $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$.

P3. Seja $I(t)$ a função que mede os juros em função do tempo. Dizer que I está crescendo é o mesmo que dizer que $I'(t) > 0$. Dizer que a taxa (de crescimento) é decrescente é o mesmo que dizer que $I'(t)$ é decrescente, que por sua vez quer dizer que $I''(t) < 0$.