Universidade Federal de Santa Catarina
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas
Departamento de Matemática

Cálculo 1 (MTM3101 e MTM3110)

Lista 3.11 - Tópico especial: modelagem uma epidemia

Última atualização: 22 de junho de 2022.

Exercícios Principais

Instruções. O conteúdo desta lista de exercício não será cobrado nas avaliações. Mesmo assim, encare essa lista como um exemplo completo de uma aplicação prática: definições, hipóteses, formulação do problema, dedução das equações, resolução do problema, interpretação das soluções e formas de atuação para obter resultados desejados. Além disso, nenhum assunto é mais atual do que uma epidemia.

P1. Definições iniciais e hipóteses. Uma patologia dissemina-se em uma população de tamanho N, o qual é suposto constante durante o período analisado. Vamos supor que a patologia não é capaz de infectar um indivíduo mais de uma vez, isto é, indivíduos que se recuperam não voltam a contrair a patologia. Em cada instante de tempo t, a população N é dividida em 3 grupos: $S(t)$, $I(t)$ e $R(t)$. $S(t)$ representa o grupo de suscetíveis, isto é, o número de indivíduos no instante t que estão aptos a contrair a patologia. $I(t)$ representa o grupo de infectados, isto é, o número de indivíduos no instante t que estão infectados com a patologia. $R(t)$ representa o grupo de removidos, isto é, o número de indivíduos no instante t que não estão suscetíveis a uma infecção. Estão neste último grupo: indivíduos já recuperados de uma infecção, mortos pela infecção (não vamos entrar nos detalhes de taxa de mortalidade aqui, quando esse dado é levado em consideração, cria-se um quarto grupo de mortos) e indivíduos que possuem alguma imunidade prévia (por exemplo, indivíduos vacinados). Outras hipóteses usadas são: (1) novas infecções são geradas somente por (algum tipo) de contato com indivíduos infectados, (2) um indivíduo infectado sempre evolui para recuperado ou morto (isto é, ninguém permanece para sempre no grupo de infectados) e (3) apesar de o número de indivíduos ser uma quantidade inteira, vamos considerar que os resultados das funções S, R e T podem ser números não inteiros para podermos trabalhar com derivadas e limites.

(a) Como traduzir matematicamente que a população é constante durante o período analisado?

(b) Como você definiria as condições iniciais do problema (isto é, $S(0)$, $I(0)$ e $R(0)$) em uma situação de uma nova patologia em que ninguém possui imunidade (dizemos que a população é virgem para a patologia considerada)? A menos que se diga o contrário, assumiremos daqui para frente que as condições iniciais são de uma população virgem.

(c) Que quantidade mede, no instante t, o número de indivíduos já infectados pela patologia?

(d) Justifique por que os limites $\lim\limits_{t\to\infty} S(t)$, $\lim\limits_{t\to\infty} I(t)$ e $\lim\limits_{t\to\infty} R(t)$ existem. Calcule $\lim\limits_{t\to\infty} I(t)$. Daqui para frente, usaremos as notações $S_\infty = \lim\limits_{t\to\infty} S(t)$ e $R_\infty = \lim\limits_{t\to\infty} R(t)$.

(e) Que quantidade caracteriza o número indivíduos que irá se infectar até que a patologia se extinga?

(f) Qual é o significado de $S'(t)$, $I'(t)$ e $R'(t)$? O que se pode afirmar sobre o sinal dessas derivadas? Mostre que $S'(t) + I'(t) + R'(t) = 0$.

P2. Modelagem. Neste exercício, deduziremos as equações que descrevem as funções S, I e R. Fixe uma unidade de tempo padrão (por exemplo dias). A partir daqui, todas as medidas que envolvem tempo estarão nesta unidade padrão. Para facilitar a escrita, usaremos explicitamente a unidade "dias".

(a) O aumento de indivíduos no grupo R se dá por indivíduos que deixaram o grupo I (ao se recuperarem ou morrerem). É natural supor que esse aumento é proporcional à quantidade de infectados (quanto mais infectados, mais novos indivíduos recuperados/mortos). Suponha que essa proporção seja constante igual a α. Que equação envolvendo R e I descreve essa situação? Quais são as unidades de α?

(b) Após estudar a patologia, infectologistas mediram T dias como o tempo entre o início da infecção até a recuperação completa (aqui, T é um tempo médio, observando vários casos). Qual é a relação entre T e α?

(c) A partir deste item, vamos encontrar as equações que regem a evolução dos casos de infecção. Seja k o número médio de contatos por dia que um indivíduo tem com outros indivíduos. A definição do que é um contato depende da patologia observada: em doenças sexualmente transmissíveis, um contato é uma relação sexual; em doenças transmissíveis pelo ar, um contato é estar perto de outro indivíduo de acordo com uma distância limite medida por estudos sobre a doença. Fixe um intervalo de tempo pequeno Δt (sempre medido em dias). Quantos contatos um indivíduo tem no intervalo de tempo Δt?

(d) Fixe um instante de tempo t e considere o intervalo de tempo de t até $t + \Delta t$. Dos contatos obtidos no item acima, quantos deles são contatos com indivíduos suscetíveis?

(e) Os valores obtidos nos dois itens acima são válidos para um indivíduo qualquer, em particular para um indivíduo infectado. Qual é o número de contatos entre indivíduos infectados e suscetíveis no intervalo de tempo de t até $t + \Delta t$?

(f) Nem todo contato entre infectado e suscetível gera uma infecção. Denote por p a probabilidade de um contato entre um infectado e um suscetível gerar uma infecção no indivíduo suscetível. Dos contatos obtidos no item anterior, quantos (em média) gerarão uma infecção?

(g) O valor obtido no item anterior é a quantidade de indivíduos que se infectou entre os instantes t e $t + \Delta t$. Todos estes indivíduos devem sair do grupo S e migrar para o grupo I. Expresse $S(t + \Delta t) - S(t)$ em termos da quantidade obtida no item anterior.

(h) Reescreva a resposta do item anterior e tome limite com Δt tendendo a 0 para concluir que $S'(t) = -\beta S(t)I(t)$, em que $\beta = \dfrac{pk}{N}$.

(i) Junte as respostas dos itens (a) e (h) e monte um sistema de equações para S', I' e R'.

Um resumo até agora. As quantidades S, I e R estão relacionadas pelas condições e equações:

(i) $S(t) + I(t) + R(t) = N$, para todo t;

(ii) $S(0) = N - 1$, $I(0) = 1$ e $R(0) = 0$;

(iii) $S'(t) = -\beta S(t)I(t)$;

(iv) $I'(t) = \beta S(t)I(t) - \alpha I(t)$;

(v) $R'(t) = \alpha I(t)$;

em que N é a população total, $\alpha = \dfrac{1}{T}$, $\beta = \dfrac{pk}{N}$, T é o tempo médio de duração da infecção, k é o número médio de contatos por dia de um indivíduo e p é a probabilidade de um contato entre um infectado e um suscetível gerar uma nova infecção. Este modelo é chamado de modelo SIR e foi proposto pela primeira vez por Kermack e McKendrick em 1927.

P3. Soluções para as equações. Resolver equações diferenciais nem sempre é uma tarefa fácil. Você verá algumas dessas técnicas na disciplina de Cálculo 2. O que faremos aqui é fornecer a solução e apenas verificar que elas satisfazem as equações.

(a) Verifique que a equação $I(t) = \dfrac{\alpha}{\beta} \ln S(t) - S(t) + C$, em que C é uma constante, define implicitamente uma solução para as equações envolvendo I e S.

(b) Utilize as condições iniciais e também o limite com t tendendo ao infinito para concluir que

$$C = N - \frac{\alpha}{\beta} \ln(N-1) = S_\infty - \frac{\alpha}{\beta} \ln S_\infty.$$

P4. Interpretações práticas das quantidades. No instante t, o número médio de novos infectados gerados por um único infectado durante seu período de infecção é denominado *número de reprodução efetivo* e é denotado por $\mathcal{R}(t)$. Quando este número é calculado em $t = 0$, é chamado de *número de reprodução básico* e pode ser denotado por $\mathcal{R}(0)$ ou $\mathcal{R}_0$ (não confunda este $\mathcal{R}$ com R de removidos). Observe que $\mathcal{R}_0$ é o número médio de novos infectados gerados por um único infectado no início da disseminação da patologia.

(a) Mostre que $\mathcal{R}(t) = \dfrac{pkTS(t)}{N} = \dfrac{\beta S(t)}{\alpha}$ e que $\mathcal{R}_0 \cong pkT = \dfrac{\beta N}{\alpha}$.

(b) Mostre que $\mathcal{R}(t)$ é uma função decrescente.

(c) Uma patologia é denominada *epidêmica* se o número de infectados é crescente no início da disseminação. Mostre que a disseminação é uma epidemia exatamente quando $\mathcal{R}_0 > 1$.

(d) Suponha que $\mathcal{R}_0 > 1$. Neste caso, já sabemos que a função $I(t)$ é inicialmente crescente. Mas também sabemos que $\lim\limits_{t\to\infty} I(t) = 0$. Com isso, obrigatoriamente $I(t)$ possui máximo absoluto. Seja t^* o instante de tempo em que o máximo absoluto é atingido. Mostre que $\mathcal{R}(t^*) = 1$.

(e) Utilize os itens (a) e (b) do exercício 3 para concluir que o valor máximo da função I é

$$I(t^*) \cong N\left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0} - \frac{\ln \mathcal{R}_0}{\mathcal{R}_0}\right).$$

(f) Outra quantidade fundamental para se medir é o número total de infectados ao longo da epidemia. Já vimos que esse número é igual a $R_\infty = \lim\limits_{t\to\infty} R(t)$. Utilize as duas caracterizações para C dadas no item (b) do exercício 3 para concluir que R_∞ satisfaz

$$\frac{R_\infty}{N} + \frac{\ln\left(\frac{N-R_\infty}{N}\right)}{\mathcal{R}_0} = 0.$$

Não provaremos aqui, mas R_∞ é a única solução não nula y da equação

$$\frac{y}{N} + \frac{\ln\left(\frac{N-y}{N}\right)}{\mathcal{R}_0} = 0.$$

P5. Um pouco de gráficos. Acesse o link `https://www.geogebra.org/graphing/h9eak6f9` e verifique os gráficos de S, I e R. Você pode selecionar lá os valores de $\mathcal{R}_0$, T, N e o número de dias para analisar a solução. Ao mudar esses valores, espere um pouco até a página atualizar os gráficos. No eixo y você tem o número de indivíduos e no eixo x o número de dias a partir da data inicial. Para a Covid-19, T é próximo de 14 dias e $\mathcal{R}_0$, dependendo da região, foi medido entre 2 e 6. Varie o valor de $\mathcal{R}_0$ e veja como este afeta o pico de infectados e também a quantidade total de infectados após a estabilização dos valores.

P6. Métodos de controle. Se estamos interessados em controlar a epidemia, basicamente queremos diminuir $\mathcal{R}(t)$ (quanto menor $\mathcal{R}(t)$, menos infectados novos são gerados). Um caso particular de controle de $\mathcal{R}(t)$ é tomar atitudes antes do (ou no) início da epidemia, diminuindo assim $\mathcal{R}(0) = \mathcal{R}_0$. Lembremos que $\mathcal{R}(t) = \dfrac{pkTS(t)}{N} = pkT\dfrac{S(t)}{N}$. Como $\mathcal{R}(t)$ é um produto de fatores, nossos métodos serão concentrados em: diminuir p, diminuir k, diminuir T e diminuir $\dfrac{S(t)}{N}$.

(a) Métodos de prevenção. Uma das formas de diminuir o valor de $\mathcal{R}(t)$ é diminuir a probabilidade p. Lembremos que p é a probabilidade de um contato entre um infectado e um suscetível gerar uma infecção. Uma das formas de diminuir esse número é o uso de métodos de prevenção de infecção no caso de um contato. Por exemplo, em DST's, o uso de preservativo. No caso da Covid-19, a higiene constante, o uso de máscara e ambientes bem ventilados são os métodos de prevenção mais adequados. Não há nada a resolver aqui, apenas observar que a medida tem que ser permanente se não quisermos fazer com o valor de $\mathcal{R}(t)$ volte a aumentar.

(b) Redução dos contatos (parte 1). Deste item em diante, trataremos de medidas voltadas diretamente para a Covid-19. Outra forma de diminuir $\mathcal{R}(t)$ é diminuir k. Lembremos que k é o número médio de contatos diários de um indivíduo. Uma das formas de diminuir k é reduzir artificialmente a circulação de pessoas fechando setores da economia e impondo restrições de movimentação. Mais uma vez não há o que fazer aqui, apenas observar que, ao desfazer medidas, $\mathcal{R}(t)$ volta a aumentar.

(c) Redução dos contatos (parte 2). Outra forma de diminuir k é mantendo o distanciamento físico entre indivíduos. Apesar de não haver uma distância exata para ser chamada de segura, evitar proximidades diminui o número de contatos e, portanto, diminui $\mathcal{R}(t)$. Mais uma vez não há o que fazer aqui, apenas observar que, para o efeito sobre $\mathcal{R}(t)$ se manter, as medidas devem ser permanentes.

(d) Redução dos contatos (parte 3). Os únicos contatos que realmente podem gerar infecções são contatos entre infectados e suscetíveis. Assim, se conseguirmos identificar os infectados e isolá-los em quarentena, reduzimos k e também $\mathcal{R}(t)$. O processo de identificação de infecções é feito através de testagem em massa junto a uma complexa organização envolvendo autoridades sanitárias. Como nas outras medidas, o efeito sobre $\mathcal{R}(t)$ se perde assim que o procedimento não é mais aplicado.

(e) Métodos de tratamento. Outro fator que altera $\mathcal{R}(t)$ é o tempo médio de infecção T. Este tempo é determinado pela doença em si, mas caso sejam desenvolvidos tratamentos que possam diminuir esse tempo, automaticamente o valor de $\mathcal{R}(t)$ diminui. Mais uma vez não há o que fazer aqui, mas é importante observar que esses tratamentos deveriam chegar à maioria dos infectados para poder fazer diferença significativa.

(f) Vacinação (parte 1). Outra estratégia para diminuir $\mathcal{R}(t)$ (ou mesmo $\mathcal{R}_0$ se ocorrer antes do início da disseminação) é a vacinação. A vacinação tem o poder de alterar o fator $\dfrac{S(t)}{N}$ pois retira indivíduos do grupo de suscetíveis e os coloca no grupo de removidos. Como $\dfrac{S(t)}{N}$ é um dos fatores de $\mathcal{R}(t)$, então a vacinação diminui $\dfrac{S(t)}{N}$ e, portanto, $\mathcal{R}(t)$. Vamos aproveitar o assunto de vacinação para definir mais um conceito. A *proporção de imunidade de rebanho* ou *proporção de imunidade coletiva*, denotada por $\mathcal{P}_{ic}$, é a proporção da população total que deve ser removida do grupo de suscetíveis para que não se tenha um cenário epidêmico. Já vimos que o número infectados para de aumentar no tempo t^* em que $\mathcal{R}(t^*) = 1$. A partir desse momento, a função I é decrescente significando que há mais pessoas se recuperando do que se infectando. Mostre que $\mathcal{P}_{ic} = 1 - \dfrac{1}{\mathcal{R}_0}$.

(g) Vacinação (parte 2). A fórmula acima nos dá um número a ser atingido em campanhas de vacinação para que a patologia não se torne epidêmica. Por exemplo, determine que porcentagem da população deve ser vacinada para não haver epidemia, em patologias com $\mathcal{R}_0$ igual a: 2; 2,5 e 5.

(h) Imunidade de rebanho natural. Outra forma de diminuir $\mathcal{R}(t)$ é deixar que ele evolua naturalmente. Eventualmente a epidemia atingirá seu pico e passará a diminuir. Observe que este procedimento envolve não agir, apenas deixar a epidemia seguir um curso natural. Em doenças não fatais e sem complicações hospitalares, talvez faça sentido. Porém, mesmo nesses casos, deixar uma nova patologia seguir sem nenhum tipo de controle pode levar a outras situações não previstas pelo modelo que desenvolvemos. Por exemplo, o surgimento de novas variantes da patologia ou a perda, com o tempo, da imunidade de um indivíduo já infectado. Considerando a situação de uma epidemia evoluindo naturalmente (supondo que todas as condições do nosso modelo se mantêm) e usando $\mathcal{R}_0 = 2{,}5$, qual é a proporção da população que deveria ser infectada até que seja atingida a imunidade de rebanho natural? E qual é a proporção total da população que se contaminará até a extinção da patologia?

(i) A estratégia de controle ideal. Depois de todo esse estudo, você deve se perguntar qual é a melhor estratégia a ser adotada. Não existe uma melhor estratégia, isso depende da patologia, da região, da população, da densidade demográfica, da cultura, etc.. Porém, há um certo padrão nas ações de controle dos países que conseguiram bons resultados no combate à Covid-19:

(i) Restrições rigorosas de início até se reduzir o número de casos ativos a um patamar controlável (falaremos desse patamar a seguir).

(ii) Campanhas educativas diárias para a população para ensinar o novo normal: métodos de prevenção, distanciamento, como agir em caso de sintomas, reforçar diariamente que os cuidados são permanentes, etc..

(iii) Definir junto às vigilâncias epidemiológicas e sanitárias qual é o número máximo (este é o patamar falado acima) de casos que tais órgãos conseguem monitorar e aplicar o rastreamento de contatos (em inglês, *contact tracing*). Além de isolar os casos suspeitos, o rastreamento de contatos vai atrás de todos as pessoas que tiveram contato com o caso suspeito nos dias em que o caso suspeito poderia infectar alguém. Todos estes contatos são colocados em quarentena. É um trabalho extremamente complexo e que perde o controle caso o número de infectados seja alto.

(iv) Fechamentos pontuais no caso de novos surtos. Caso o patamar de controle acima seja ultrapassado, aplica-se quarentena à região até que o patamar seja restabelecido.

(v) Com todas as medidas acima, quase todas as atividades econômicas e comerciais podem voltar a funcionar com boa segurança. Mas a manutenção dessa segurança depende uma união entre a população: as ações de cada um contribuem um pouquinho para a variação do $\mathcal{R}(t)$. Cada vez que parte da população se cansa das medidas pode haver novos surtos e todo o trabalho de controle se perde, sendo necessário fazer novos fechamentos e novas restrições. É extremamente difícil atingir e manter o controle, mas é muito fácil perdê-lo.

(vi) Alguns países adotaram a estratégia de extinguir os casos de transmissão comunitária. Em outras palavras, o que fizeram foi aplicar medidas de controle até zerar o número de casos. Claro que nessa situação podemos pensar que tudo acabou, porém ela pode voltar vinda de alguma região externa. Neste caso, para se manter assim, um complexo e rigoroso controle de fronteiras deve ser aplicado e, ao menor sinal de falha no controle, toda a região afetada deve ser isolada até que os novos casos detectados sejam extintos.

(vii) Entre a (1) estratégia de manter o número de casos a um patamar baixo e aplicar rastreamento de contatos e a (2) estratégia de extinguir os casos e controlar todo tipo de entrada de pessoas na região, a segunda teve mais sucesso. O fator mais importante para o sucesso da estratégia (2) foi que, na estratégia (1), é necessário contar com a colaboração da população inteira pra não deixar o número de casos perder o controle. E a população tem “prazo de validade” para manter uma rotina de cuidados. Alguns países perderam o controle e tiveram que voltar à estaca zero porque a população não aguentava mais tanto tempo de cuidados e restrições. Por outro lado, na estratégia (2), você pode dar muito mais liberdade à população sem correr tantos riscos, uma vez que os novos casos só podem vir de fontes externas. Porém, mesmo no caso (2), a população deve estar ciente de que, se um único caso foi detectado, a região envolvida deve ser isolada do restante e também deve ter restrições rigorosas até que se tenha certeza de que não há mais casos. Estes são os cenários mais próximos da normalidade que podemos ter (sem mortes e sem restrições econômicas) antes do surgimento de uma vacina. Após uma campanha de vacinação em massa, reduzindo significativamente o fator $\frac{S(t)}{N}$, podemos afrouxar nossas medidas para diminuir os fatores k e p, isto é, nossos cuidados com aglomerações e higiene.

Considerações finais. Esperamos que essa lista de exercícios possa mostrar a vocês um pouco do nosso cenário atual e também como a matemática é importante nas mais diversas situações. O desafio lançado para vocês é tentar explicar aos seus amigos e parentes um pouco do que está aqui de forma simples e didática. Boa sorte!

Universidade Federal de Santa Catarina
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas
Departamento de Matemática

Cálculo 1 (MTM3101 e MTM3110)

Gabarito da Lista 3.11

Tópico especial: modelagem uma epidemia

Última atualização: 22 de junho de 2022.

Exercícios Principais

P1.

(a) É o mesmo que dizer que $S(t) + I(t) + R(t) = N$ para todo t. Para tratar de epidemias de longo prazo, com duração de décadas por exemplo, essa hipótese de população constante não seria adequada. Neste caso um outro modelo com inclusão de crescimento populacional seria necessário.

(b) Neste caso, toda a população N é suscetível, isto é, $S(0) = N$, $I(0) = 0$ e $R(0) = 0$. Mas isso também quer dizer que não há ninguém infectado. Assim, quando queremos falar de uma patologia recém disseminada, colocamos um indivíduo infectado e o restante como suscetíveis. Logo, as condições inciais mais indicadas para uma patologia recém disseminada é $S(0) = N-1$, $I(0) = 1$ e $R(0) = 0$. Lembre que a soma destes três valores deve ser N.

(c) O número de infectados no instante t é $I(t)$, mas o número de indivíduos já infectados inclui infectados previamente também. Esta quantidade é medida incluindo infectados e removidos: $I(t) + R(t)$. Note que essa quantidade é o mesmo que $N - S(t)$ (todos que não são mais suscetíveis).

(d) Para justificar que $\lim\limits_{t\to\infty} R(t)$ existe, vejamos que R é uma função não decrescente (pois removidos não voltam para o grupo de suscetíveis nem para o grupo de infectados) e é limitada superiormente por N. Não vimos esse teorema, mas pense no gráfico de uma função não decrescente limitada superiormente e conclua intuitivamente que seu limite no infinito existe. Um argumento semelhante mostra que $\lim\limits_{t\to\infty} S(t)$ existe, pois S não crescente e é limitada inferiormente por 0. Agora, usando que $I(t) = N - S(t) - R(t)$, concluímos que

$$\lim_{t\to\infty} I(t) = N - \lim_{t\to\infty} S(t) - \lim_{t\to\infty} R(t)$$

e, portanto, $\lim\limits_{t\to\infty} I(t)$ também existe. Vamos mostrar agora que $\lim\limits_{t\to\infty} I(t) = 0$. Suponha que este limite não seja 0, digamos $L > 0$. Isto significa que após muito tempo, o número de infectados é aproximadamente constante igual a L. Como infectados sempre se recuperam ou morrem em algum momento, então para a função permanecer aproximadamente constante igual a L é necessário que novas pessoas sejam infectadas na mesma proporção que se recuperam ou morrem. Mas, para isso, seria necessária uma quantidade infinita de pessoas no grupo de suscetíveis, para sempre ter alguém para continuar se infectando ao longo do tempo. Como não há infinitas pessoas, então obrigatoriamente o limite $\lim\limits_{t\to\infty} I(t)$ deve ser igual a 0.

(e) $I(t) + R(t)$ mede a quantidade já infectada no instante t. Assim, a quantidade de indivíduos que se infectará ao longo de toda a vida da patologia é $\lim\limits_{t\to\infty}(I(t) + R(t))$. Como $\lim\limits_{t\to\infty} I(t) = 0$, então essa quantidade é igual a

$$\lim_{t\to\infty}(I(t)+R(t)) = \lim_{t\to\infty} I(t) + \lim_{t\to\infty} R(t) = 0 + R_\infty = R_\infty.$$

(f) Cada derivada significa a taxa de variação por unidade de tempo de cada quantidade. Como a quantidade de suscetíveis só pode diminuir, então $S'(t) \leq 0$ para todo t. Por outro lado, como $R(t)$ só pode aumentar, então $R'(t) \geq 0$ para todo t. Nada se pode afirmar sobre o sinal de $I'(t)$. Como $S(t)+I(t)+R(t) = N$ e N é constante, então $S'(t)+I'(t)+R'(t) = 0$.

P2.

(a) O aumento de R nada mais é do que sua taxa de variação, que é a sua derivada. Logo, a informação de que o aumento é proporcional à quantidade de infectados é o mesmo que dizer que $R'(t) = \alpha I(t)$. Como $R'(t)$ é medido em indivíduos/dias e $I(t)$ é medido em indivíduos, então α deve ser medido 1/dias.

(b) Vamos explicar a relação através de um exemplo. Imagine que T seja igual a 7 dias. Se os infectados estiverem igualmente distribuídos conforme sua data de infecção, então 1/7 vai se recuperar no próximo dia, mais 1/7 no próximo dia, e assim por diante. Mas lembre que essa taxa de recuperação por dia é α. Então, nesse exemplo, $\alpha = 1/7$. Se tivéssemos pensado com T genérico, chegaríamos à relação $\alpha = 1/T$.

(c) Uma vez que k é o número de contatos por dia, então $k\Delta t$ é o número de contatos no intervalo de tempo Δt.

(d) $k\Delta t$ é o número de contatos. Assumindo que estes contatos estão proporcionalmente distribuídos entre indivíduos nos grupos S, I e R, então $k\Delta t\cdot\dfrac{S(t)}{N}$ é a quantidade de contatos com indivíduos suscetíveis, pois $\dfrac{S(t)}{N}$ é a proporção de suscetíveis na população total.

(e) Como $k\Delta t\cdot\dfrac{S(t)}{N}$ é a quantidade de contatos com suscetíveis de um indivíduo infectado, então $k\Delta t\cdot\dfrac{S(t)}{N}\cdot I(t)$ é a quantidade total de contatos entre suscetíveis e infectados.

(f) Basta multiplicar o número de contatos pela probabilidade: $\dfrac{pk}{N}S(t)I(t)\Delta t$.

(g) $S(t+\Delta t) - S(t)$ é a quantidade de indivíduos suscetíveis no instante $t+\Delta t$ menos a quantidade de suscetíveis no instante t. Como nesse intervalo de tempo $\dfrac{pk}{N}S(t)I(t)\Delta t$ é a quantidade de indivíduos que deixou de ser suscetível, então

$$S(t+\Delta t) - S(t) = -\frac{pk}{N}S(t)I(t)\Delta t.$$

O sinal de menos é porque estamos retirando indivíduos do grupo S.

(h)

$$S(t+\Delta t) - S(t) = -\beta S(t)I(t)\Delta t \;\Rightarrow\; \frac{S(t+\Delta t) - S(t)}{\Delta t} = -\beta S(t)I(t) \;\Rightarrow$$
$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{S(t+\Delta t) - S(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0} -\beta S(t)I(t) \;\Rightarrow\; S'(t) = -\beta S(t)I(t).$$

(i) Já vimos que $R'(t) = \alpha I(t)$ e que $S'(t) = -\beta S(t)I(t)$. Mas toda a quantidade que sai de S migra para I e tudo o que entra em R saiu de I. Logo $I'(t) = \beta S(t)I(t) - \alpha I(t)$. Juntando tudo, ficamos com

$$\begin{cases} S'(t) &=& -\beta S(t)I(t) \\ I'(t) &=& \beta S(t)I(t) - \alpha I(t) \\ R'(t) &=& \alpha I(t) \end{cases}.$$

P3.

(a) Derivando os dois lados da equação, obtemos

$$I'(t) = \frac{\alpha}{\beta}\frac{S'(t)}{S(t)} - S'(t) = \left(\frac{\alpha}{\beta S(t)} - 1\right) S'(t) = \left(\frac{\alpha}{\beta S(t)} - 1\right)(-\beta S(t)I(t)) = \beta S(t)I(t) - \alpha I(t).$$

(b) Isolando C, obtemos

$$C = I(t) + S(t) - \frac{\alpha}{\beta}\ln S(t).$$

Aplicando em $t = 0$, obtemos

$$C = I(0) + S(0) - \frac{\alpha}{\beta}\ln S(0) = 1 + (N-1) - \frac{\alpha}{\beta}\ln(N-1) = N - \frac{\alpha}{\beta}\ln(N-1).$$

Agora, ao invés de aplicar em $t = 0$, vamos tomar o limite com t tendendo a infinito:

$$\lim_{t\to\infty} C = \lim_{t\to\infty}\left(I(t) + S(t) - \frac{\alpha}{\beta}\ln S(t)\right).$$

Usando as notações e resultados do item (d) do exercício 1, obtemos

$$C = 0 + S_\infty - \frac{\alpha}{\beta}\ln S_\infty = S_\infty - \frac{\alpha}{\beta}\ln S_\infty.$$

P4.

(a) Já vimos que o número de novos infectados por dia por um único infectado é $\frac{pkS(t)}{N}$. Como o tempo de infecção é T, então um infectado infectará $\frac{pkTS(t)}{N}$ indivíduos durante seu tempo de infecção, que é a definição dada para $\mathcal{R}(t)$. Usando que $\frac{pk}{N} = \beta$ e que $T = \frac{1}{\alpha}$, também chegamos a $\mathcal{R}(t) = \frac{pkTS(t)}{N} = \frac{\beta S(t)}{\alpha}$. Aplicando essa relação em $t = 0$, obtemos $\mathcal{R}_0 = \frac{pkT(N-1)}{N} = \frac{\beta(N-1)}{\alpha}$ e usando que $\frac{N-1}{N} \cong 1$ pois supomos que a população N é um número grande, então $\mathcal{R}_0 \cong pkT = \frac{\beta N}{\alpha}$.

(b) Como $\mathcal{R}(t) = \frac{\beta S(t)}{\alpha}$, α e β são números positivos e $S(t)$ é decrescente, então $\mathcal{R}(t)$ é decrescente.

(c) Há duas formas de se provar essa afirmação. A primeira é diretamente pela definição de $\mathcal{R}_0$ como número médio de novos infectados gerados por um único infectado no início da disseminação da patologia. Se um infectado gera mais de um novo infectado, isto é, $\mathcal{R}_0 > 1$, então após o infectado inicial se recuperar, ele terá deixado mais novos infectados do que havia inicialmente. Em outras palavras, o grupo I cresce. Outra forma de verificar essa condição é usar nossos conhecimentos de Cálculo. Dizer que I é uma função crescente é o mesmo que dizer que sua derivada é positiva. Como queremos ver o crescimento apenas no início da disseminação, então queremos verificar se $I'(0) > 0$. Manipulando a equação $I'(t) = \beta S(t)I(t) - \alpha I(t)$, obtemos $I'(0) = \beta S(0)I(0) - \alpha I(0) = \beta(N-1) - \alpha \cong \beta N - \alpha$. Assim,

$$I'(0) > 0 \quad\Leftrightarrow\quad \beta N - \alpha > 0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{\beta N}{\alpha} > 1 \quad\Leftrightarrow\quad \mathcal{R}_0 > 1.$$

(d) Há duas formas de se chegar a essa conclusão. A primeira é interpretando o significado de $\mathcal{R}(t)$ que mede, no instante t o número médio de novos infectados gerados por um único infectado durante seu período de infecção. Enquanto esse número for maior que 1, entram mais infectados novos em I do que saem, portanto I está crescendo nesse período. A mudança ocorre quando $\mathcal{R}(t)$ deixa de ser maior que 1, portanto, igual a 1. Outra forma de pensar é usando nossas ferramentas de Cálculo. I atinge seu máximo nos extremos do intervalo considerado ou nos pontos críticos. Como já sabemos que não está nos extremos, então devemos procurar nos pontos críticos. Usando que $I'(t) = \beta S(t)I(t) - \alpha I(t)$, temos

$$I'(t^*) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \beta S(t^*)I(t^*) - \alpha I(t^*) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \beta S(t^*) - \alpha = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\beta S(t^*)}{\alpha} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{R}(t^*) = 1.$$

Aqui usamos que t^* é ponto crítico de I e que $I(t^*) \neq 0$ (pois caso contrário não haveria mais infectados).

(e) Sabemos que $\mathcal{R}(t^*) = 1$ e, portanto, $\dfrac{\beta S(t^*)}{\alpha} = 1$. Logo, $S(t^*) = \dfrac{\alpha}{\beta}$. Substituindo na equação entre I e S dada no item (a) do exercício 3, obtemos

$$I(t^*) = \frac{\alpha}{\beta} \ln\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) - \frac{\alpha}{\beta} + C.$$

Usando agora que $C = N - \dfrac{\alpha}{\beta}\ln(N-1)$ (pelo item (b) do exercício 3), obtemos

$$I(t^*) = \frac{\alpha}{\beta} \ln\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) - \frac{\alpha}{\beta} + N - \frac{\alpha}{\beta}\ln(N-1).$$

Todo o trabalho agora é escrever em termos de $\mathcal{R}_0$ (usando que $\dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{N}{\mathcal{R}_0}$) e aproximar $N-1$ por N:

$$I(t^*) = \frac{\alpha}{\beta} \ln\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) - \frac{\alpha}{\beta} + N - \frac{\alpha}{\beta}\ln(N-1) \cong \frac{N}{\mathcal{R}_0} \ln\left(\frac{N}{\mathcal{R}_0}\right) - \frac{N}{\mathcal{R}_0} + N - \frac{N}{\mathcal{R}_0}\ln N =$$

$$\frac{N}{\mathcal{R}_0}(\ln N - \ln \mathcal{R}_0) - \frac{N}{\mathcal{R}_0} + N - \frac{N}{\mathcal{R}_0}\ln N = N\left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0} - \frac{\ln \mathcal{R}_0}{\mathcal{R}_0}\right).$$

(f) Do item (b) do exercício 3, sabemos que

$$C = N - \frac{\alpha}{\beta}\ln(N-1) = S_\infty - \frac{\alpha}{\beta}\ln S_\infty.$$

Fazendo as substituições $\dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{N}{\mathcal{R}_0}$, $N - 1 \cong N$ e $S_\infty = N - R_\infty$, obtemos

$$N - \frac{N}{\mathcal{R}_0}\ln N = N - R_\infty - \frac{N}{\mathcal{R}_0}\ln(N - R_\infty) \quad \Rightarrow$$

$$R_\infty + \frac{N}{\mathcal{R}_0}(\ln(N - R_\infty) - \ln N) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{R_\infty}{N} + \frac{\ln\left(\frac{N-R_\infty}{N}\right)}{\mathcal{R}_0} = 0.$$

P5.

P6.

(a)

(b)

(c)

(d)

(e)

(f) Pela definição de $\mathcal{P}_{ic}$, temos $\mathcal{P}_{ic} = \dfrac{N - S(t^*)}{N}$. Como já sabemos que $\mathcal{R}(t^*) = 1$ e que $\mathcal{R}(t^*) = \dfrac{\beta S(t^*)}{\alpha}$, então $S(t^*) = \dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{N}{\mathcal{R}_0}$. Substituindo em $\mathcal{P}_{ic}$, obtemos

$$\mathcal{P}_{ic} = \frac{N - S(t^*)}{N} = \frac{N - N/\mathcal{R}_0}{N} = 1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0}.$$

(g) $\mathcal{P}_{ic}$ é exatamente a quantidade que procuramos. Uma vez vacinada a proporção $\mathcal{P}_{ic}$ da população, estes são removidos do grupo S e o valor de $\mathcal{R}(t)$ fica menor ou igual a 1. Para $\mathcal{R}_0 = 2$, $\mathcal{P}_{ic} = 1 - \dfrac{1}{2} = 50\%$; para $\mathcal{R}_0 = 2{,}5$, $\mathcal{P}_{ic} = 1 - \dfrac{1}{2{,}5} = 60\%$; para $\mathcal{R}_0 = 5$, $\mathcal{P}_{ic} = 1 - \dfrac{1}{5} = 80\%$.

(h) A quantidade até atingir a imunidade de rebanho é a mesma que já vimos acima, 60%. Mas é importante perceber que essa é a quantidade infectada até o pico da epidemia. Após isso, mais pessoas ainda se infectarão. Essa quantidade é pela equação do item (f) do exercício 4. Resolvendo em um software, obtemos $R_\infty \cong 89\%$. A diferença $R_\infty - \mathcal{P}_{ic} \cong 29\%$ é denominada na literatura de *excedente* (em inglês, *overshooting*).

(i)