Universidade Federal de Santa Catarina
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas
Departamento de Matemática

Cálculo 1 (MTM3101 e MTM3110)

Lista 4.1 - A integral de Riemann e o Primeiro Teorema Fundamental do Cálculo

Última atualização: 22 de junho de 2022.

Exercícios Principais

P1. Seja A a medida da área da região limitada inferiormente pelo eixo x, superiormente pela função $f(x) = x^2 + 1$, à esquerda pela reta $x = 1$ e à direita pela reta $x = 3$.

(a) Faça um gráfico representando a situação.

(b) Como A é descrita em termos de integral?

(c) Estime o valor de A dividindo o intervalo $[1, 3]$ em duas partes iguais e usando dois retângulos abaixo do gráfico de f. Faça um gráfico representando a situação.

(d) Estime o valor de A dividindo o intervalo $[1, 3]$ em duas partes iguais e usando dois retângulos acima do gráfico de f. Faça um gráfico representando a situação.

(e) Estime o valor de A dividindo o intervalo $[1, 3]$ em quatro partes iguais e usando quatro retângulos abaixo do gráfico de f. Faça um gráfico representando a situação.

(f) Estime o valor de A dividindo o intervalo $[1, 3]$ em quatro partes iguais e usando quatro retângulos acima do gráfico de f. Faça um gráfico representando a situação.

(g) Coloque em ordem crescente as respostas dos itens (b) a (f).

P2. Seja A a medida da área da região limitada inferiormente pelo eixo x, superiormente pela função $f(x) = 2^x$, à esquerda pela reta $x = 0$ e à direita pela reta $x = 2$.

(a) Faça um gráfico representando a situação.

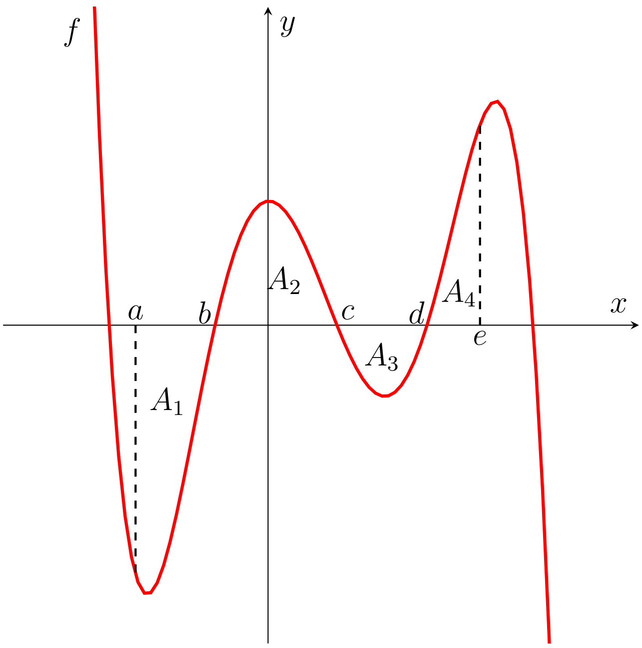
(b) Estime inferiormente o valor de A usando um retângulo de base sobre o intervalo $[0, 2]$ e altura igual ao menor valor de f no intervalo $[0, 2]$. Faça um gráfico representando a situação.

(c) Estime superiormente o valor de A usando um retângulo de base sobre o intervalo $[0, 2]$ e altura igual ao maior valor de f no intervalo $[0, 2]$. Faça um gráfico representando a situação.

(d) Descreva a relação de ordem entre os valores obtidos acima e a integral que fornece a área A.

(e) Se esse exercício fosse feito em um intervalo $[a, b]$ com uma função f qualquer, qual seria a resposta obtida no item (c)?

P3. Considere a função f cujo gráfico está representado abaixo. Em cada região marcada, está indicada a medida da área.



(a) Escreva o resultado das integrais $\int_a^b f(x)dx$, $\int_b^c f(x)dx$, $\int_c^d f(x)dx$ e $\int_d^e f(x)dx$ em termos das medidas das áreas.

(b) Escreva o resultado das integrais $\int_a^c f(x)dx$, $\int_a^d f(x)dx$ e $\int_a^e f(x)dx$ em termos das medidas das áreas.

(c) Escreva o resultado de $A_1 + A_2$, $A_1 + A_2 + A_3$ e $A_1 + A_2 + A_3 + A_4$ em termos de integrais.

P4. Considere a função $f(x) = x + 1$. Utilize o gráfico de f para calcular as integrais abaixo.

(a) $\int_{-2}^{-1} f(x)dx$. **(b)** $\int_{-2}^{0} f(x)dx$. **(c)** $\int_{0}^{3} f(x)dx$. **(d)** $\int_{3}^{0} f(x)dx$.

P5. Diga se os itens abaixo são verdadeiros ou falsos. Tente, mesmo que informalmente, justificar suas respostas.

(a) Toda função é integrável.

(b) Toda função limitada é integrável.

(c) Se f é contínua em $[a, b]$, então f é integrável em $[a, b]$.

(d) Se f é contínua por partes em $[a, b]$, então f é integrável em $[a, b]$.

(e) Como o resultado de uma integral é uma área, então o resultado de uma integral sempre é maior ou igual a 0.

P6. Seja f uma função contínua. Mostre que $y(x) = y_0 + \int_a^x f(t)dt$ é uma solução para a equação diferencial $y'(x) = f(x)$ com condição inicial $y(a) = y_0$.

P7. Utilize o exercício acima para concluir que se um objeto possui função velocidade $v(t)$, com v contínua, e posição inicial $s(0) = s_0$, então sua função posição $s(t)$ é dada por

$$s(t) = s_0 + \int_0^t v(u)du.$$

P8. Em cada item, utilize o Primeiro Teorema Fundamental do Cálculo, propriedades da integral (se necessário) e as regras de derivação (se necessário) para calcular a derivada da função f.

(a) $f(x) = \int_0^x \sqrt{1+t^3}\,dt.$

(b) $f(x) = \int_x^0 \sqrt{1+\sec t}\,dt.$

(c) $f(x) = \int_1^{e^x} \ln t\,dt.$

(d) $f(x) = \int_x^{2x} (t^2+1)\,dt.$

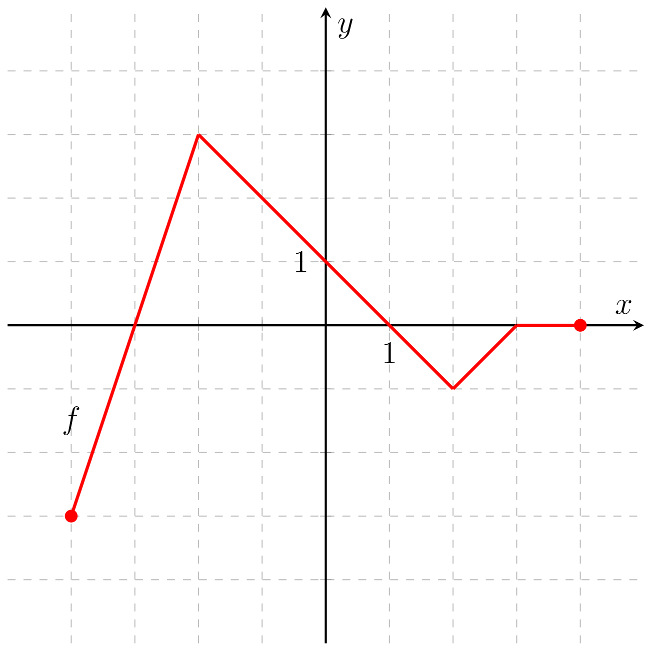
P9. A pressão hidrostática $P(x)$ (medida em Pascal) exercida contra a lateral de uma piscina a uma profundidade x (medida em metros) é dada por

$$P(x) = \int_0^{3\ln x} (t+13)e^{2t}\,dt.$$

Determine a taxa de variação da pressão em relação à profundidade quando $x = 1\,\mathrm{m}$.

Exercícios Complementares

C1. Considere a função f cujo gráfico está representado abaixo. Calcule as integrais pedidas.



(a) $\int_{-4}^{-3} f(x)dx.$ **(b)** $\int_{-4}^{-2} f(x)dx.$ **(c)** $\int_{-2}^{2} f(x)dx.$ **(d)** $\int_{-4}^{2} f(x)dx.$

(e) $\int_{3}^{4} f(x)dx.$ **(f)** $\int_{1}^{-3} f(x)dx.$ **(g)** $\int_{2}^{2} f(x)dx.$

C2. Utilize o significado geométrico da integral para concluir que:

(a) $\int_a^b C dx = C(b-a)$, em que C é uma constante.

(b) $\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$

(c) $\int_a^a f(x)dx = 0.$

(d) Se f é uma função ímpar e integrável, então $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$.

(e) Se f é uma função par e integrável, então $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)$.

C3. Seja h uma função que satisfaz $h(x) = \displaystyle\int_{2\ln x}^{2a\ln x} e^{bt}\,dt$ e $h'(x) = cx^{17} + dx^5$. Determine $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ sabendo que a é um número inteiro.

C4. Considere a função f cujo gráfico está no exercício **C1.** e seja $g(x) = \displaystyle\int_{0}^{x} f(t)dt$.

(a) Calcule $g(0)$, $g(1)$, $g(2)$ e $g(-2)$.

(b) Calcule $g'(0)$, $g'(1)$, $g'(2)$ e $g'(-2)$.

(c) O que você pode dizer sobre o crescimento ou decrescimento de g nos intervalos $[0, 1]$ e $[1, 2]$?

C5. Em cada item, utilize o Primeiro Teorema Fundamental do Cálculo, propriedades da integral (se necessário) e as regras de derivação (se necessário) para calcular a derivada da função f.

(a) $f(x) = \displaystyle\int_{1}^{x} \ln(1+t^2)\,dt$.

(b) $f(x) = \displaystyle\int_{x}^{2} t^3 \operatorname{sen} t\,dt$.

(c) $f(x) = \displaystyle\int_{0}^{x^2} t^3\,dt$.

(d) $f(x) = \displaystyle\int_{x}^{x^2} e^t\,dt$.

Universidade Federal de Santa Catarina
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas
Departamento de Matemática

Cálculo 1 (MTM3101 e MTM3110)

Gabarito da Lista 4.1

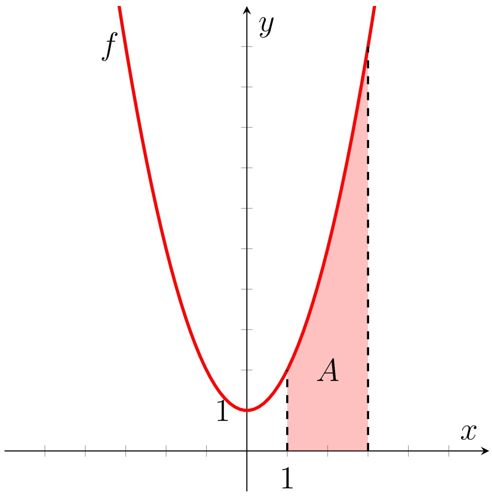
A integral de Riemann e o Primeiro Teorema Fundamental do Cálculo

Última atualização: 22 de junho de 2022.

Exercícios Principais

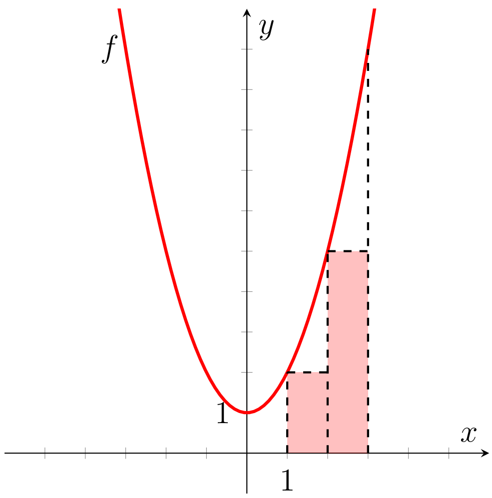
P1.

(a)

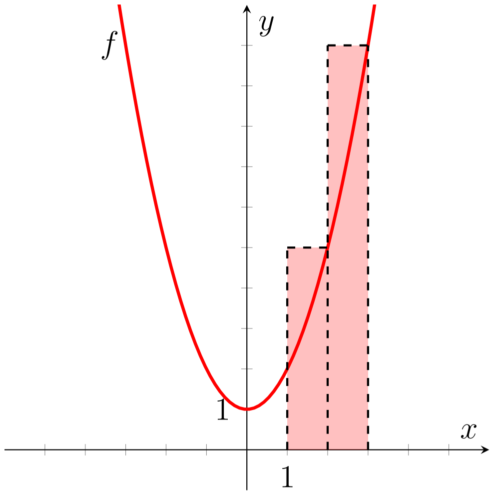


(b) $A = \displaystyle\int_1^3 (x^2 + 1)\, dx.$

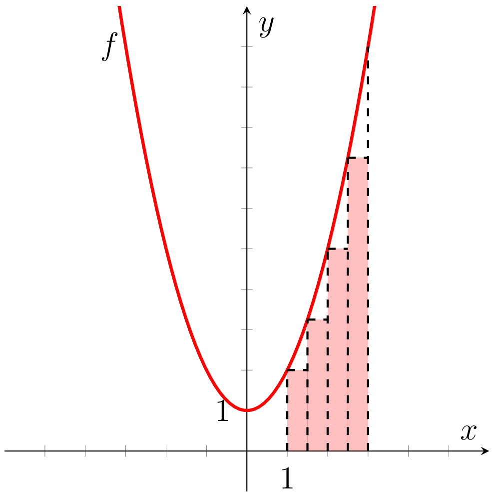
(c) A área A é maior que $1 \cdot 2 + 1 \cdot 5 = 7$.



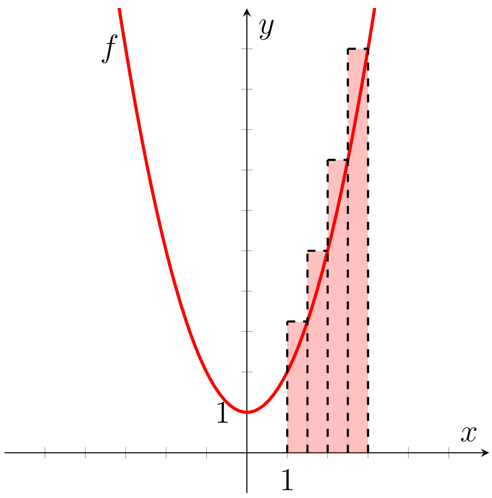
(d) A área A é menor que $1 \cdot 5 + 1 \cdot 10 = 15$.



(e) A área A é maior que $0{,}5 \cdot 2 + 0{,}5 \cdot 3{,}25 + 0{,}5 \cdot 5 + 0{,}5 \cdot 7{,}25 = 8{,}75$.



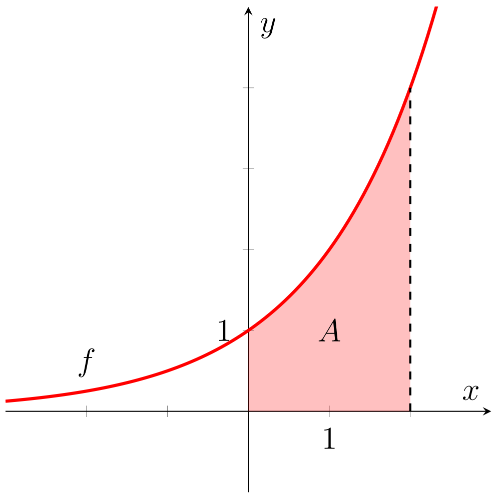
(f) A área A é menor que $0{,}5 \cdot 3{,}25 + 0{,}5 \cdot 5 + 0{,}5 \cdot 7{,}25 + 0{,}5 \cdot 10 = 12{,}75$.



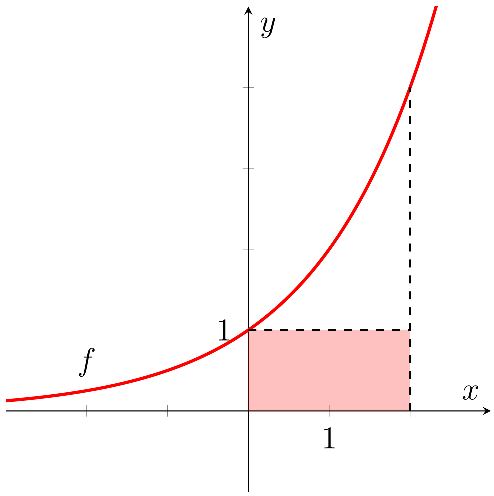
(g) $7 < 8{,}75 < A = \displaystyle\int_1^3 (x^2+1)\,dx < 12{,}75 < 15$. Nas próximas listas veremos que o valor exato de A é $\dfrac{32}{3}$.

P2.

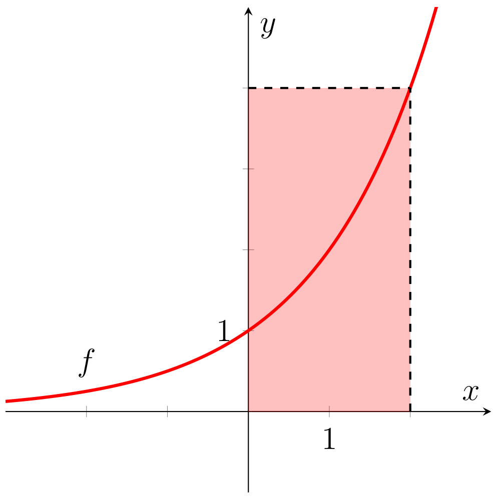
(a)



(b) A área A é maior que $2 \cdot 1 = 2$.



(c) A área A é menor que $2 \cdot 4 = 8$.



(d) $2 < A = \displaystyle\int_0^2 2^x \, dx < 8$. Nas próximas listas veremos que o valor exato de A é $\dfrac{3}{\ln 2}$.

(e) Sejam m e M tais que $m \leq f(x) \leq M$ para todo $x \in [a, b]$ (só é possível encontrar m e M se f for limitada em $[a, b]$). A área do retângulo inferior é $m(b-a)$ e do superior é $M(b-a)$. Logo, o resultado do item (c) é

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

Note que como a função pode ser constante, devemos usar menor ou igual em uma situação geral. Note também que no exemplo visto aqui usamos $f(0)$ e $f(2)$ como valores inferior e superior para f, mas nem sempre o menor e maior valores estão nos extremos do intervalo.

P3.

(a) $\int_a^b f(x)dx = -A_1$, $\int_b^c f(x)dx = A_2$, $\int_c^d f(x)dx = -A_3$ e $\int_d^e f(x)dx = A_4$.

(b) $\int_a^c f(x)dx = -A_1 + A_2$, $\int_a^d f(x)dx = -A_1 + A_2 - A_3$ e $\int_a^e f(x)dx = -A_1 + A_2 - A_3 + A_4$.

(c) $A_1 + A_2 = -\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$,

$A_1 + A_2 + A_3 = -\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx - \int_c^d f(x)dx$ e

$A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = -\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx - \int_c^d f(x)dx + \int_d^e f(x)dx$.

P4.

(a) $-\frac{1}{2}$. **(b)** 0. **(c)** $\frac{15}{2}$. **(d)** $-\frac{15}{2}$.

P5.

(a) F. **(b)** F. **(c)** V. **(d)** V. **(e)** F.

P6. Observe que substituindo x por a na expressão para $y(x)$ obtemos $y(a) = y_0 + \int_a^a f(t)dt = y_0$, o que mostra que a condição inicial é satisfeita. Além disso, pelo Primeiro Teorema Fundamental do Cálculo, $y'(x) = f(x)$, mostrando que y também satisfaz a equação diferencial.

Cuidado! Mostramos que $y(x)$ é *uma* solução para o problema

$$\begin{cases} y'(x) = f(x) \\ y(a) = y_0, \end{cases}$$

mas como sabemos se não há outras? No próximo tópico da disciplina (o de Primitivas), você verá resultados que nos garantem que $y(x)$ é, de fato, a *única solução* para este problema!

P7. **Uma observação inicial:** trocamos a variável de integração, na expressão de $s(t)$, por u para que ela não seja confundida com a variável t da função s (pois as duas não estão relacionadas). Como queríamos que a variável fosse a letra t (para indicar o tempo), demos um novo nome para a variável de integração. A variável de integração pode ter o nome que você preferir, pois ela não interfere no valor da integral!

Sabemos que a função velocidade é a derivada da função posição, isto é, $s'(t) = v(t)$. Também temos uma condição inicial $s(0) = s_0$. Este problema é o mesmo do exercício acima com t no lugar de x, $v(t)$ no lugar de $f(x)$, $s(t)$ no lugar de $y(x)$, 0 no lugar de a, s_0 no lugar de y_0 e u no lugar da variável de integração t. Assim, substituindo os valores, e lembrando que a fórmula do exercício acima nos dá a única solução do problema $s'(t) = v(t)$ e $s(0) = s_0$, obtemos

$$s(t) = s_0 + \int_0^t v(u)du.$$

P8.

(a) $f'(x) = \sqrt{1 + x^3}$. **(b)** $f'(x) = -\sqrt{1 + \sec x}$.

(c) $f'(x) = xe^x$. **(d)** $f'(x) = 2((2x)^2 + 1) - (x^2 + 1) = 7x^2 + 1$.

P9. $P'(1) = 39\,\mathrm{Pa/m}$.

Exercícios Complementares

C1.

(a) $-\dfrac{3}{2}$. **(b)** 0. **(c)** 4. **(d)** 4.

(e) 0. **(f)** -6. **(g)** 0.

C2.

(a) **(b)** **(c)** **(d)** **(e)**

C3. $a = 3$, $b = 3$, $c = 6$ e $d = -2$.

C4.

(a) $g(0) = \displaystyle\int_0^0 f(t)dt = 0$, $g(1) = \displaystyle\int_0^1 f(t)dt = \frac{1}{2}$, $g(2) = \displaystyle\int_0^2 f(t)dt = 0$ e $g(-2) = \displaystyle\int_0^{-2} f(t)dt = -4$.

(b) $g'(0) = f(0) = 1$, $g'(1) = f(1) = 0$, $g'(2) = f(2) = -1$ e $g'(-2) = f(-2) = 3$.

(c) g é crescente em $[0, 1]$ e decrescente em $[1, 2]$.

C5.

(a) $f'(x) = \ln(1 + x^2)$. **(b)** $f'(x) = -x^3 \operatorname{sen} x$.

(c) $f'(x) = 2x^7$. **(d)** $f'(x) = 2xe^{x^2} - e^x$.