



Cálculo 1 (MTM3101 e MTM3110)

Lista 4.2 - Primitivas

Última atualização: 22 de junho de 2022.

Exercícios Principais

- P1.** Seja F uma função cuja derivada é f . Explique primitiva, primitiva geral e integral indefinida usando F e f .
- P2.** Seja f uma função. Explique primitiva, primitiva geral e integral indefinida usando f e f' .
- P3.** Considere a função $f(x) = x^2 - x + 7$.
- (a) Encontre três primitivas diferentes para f .
 - (b) Encontre uma primitiva geral para f .
 - (c) Encontre uma primitiva F para f que satisfaz $F(3) = 5$.
- P4.** Lembrando do que fizemos na lista *Derivada da função inversa*, encontre uma primitiva para as funções abaixo.
- (a) $f(x) = \arcsen x$.
 - (b) $f(x) = \arctg x$.
 - (c) $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$, em que $R > 0$ está fixado.
- P5.** Escreva o exercício anterior usando a notação de integral indefinida.
- P6.** Assim como fizemos com derivadas, construiremos uma tabela de integrais indefinidas. Teremos algumas integrais imediatas, propriedades e regras de integração. Sem querer assustar muito, pesquise por “tabela de integrais” para ver um pouco do que aprenderemos nas próximas semanas. Abaixo estão nossos primeiros itens conhecidos.

- | | |
|--|--|
| (i) $\int k dx = kx + C, \quad k \text{ constante}$ | (ii) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$ |
| (iii) $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$ | (iv) $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctg x + C$ |
| (v) $\int e^x dx = e^x + C$ | (vi) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad a > 0 \text{ e } a \neq 1$ |
| (vii) $\int \sen x dx = -\cos x + C$ | (viii) $\int \cos x dx = \sen x + C$ |
| (ix) $\int \sec^2 x dx = \tg x + C$ | (x) $\int \operatorname{cosec}^2 x dx = -\cotg x + C$ |
| (xi) $\int \sec x \tg x dx = \sec x + C$ | (xii) $\int \operatorname{cosec} x \cotg x dx = -\operatorname{cosec} x + C$ |
| (xiii) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsen x + C$ | (xiv) $\int k f(x) dx = k \int f(x) dx$ |
| (xv) $\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$ | (xvi) $\int (f(x) - g(x)) dx = \int f(x) dx - \int g(x) dx$ |

Antes de usar os itens, vamos entendê-los.

- (a) Como verificar se as integrais imediatas da tabela estão corretas? Mais geralmente, como testar se uma integral indefinida está correta?
- (b) Os itens (iii), (iv) e (xiii) têm uma notação estranha. Essas notações são feitas “usando” dx como se fosse algo que multiplica a função dentro da integral. Reescreva esses itens na notação usual (com a função seguida do dx).
- (c) Seguindo a mesma ideia do item anterior, como seriam as duas possíveis notações para a integral da função constante igual a 1?
- (d) Verifique que os itens (i) a (xiii) (exceto o item (iii)) estão corretos, isto é, calcule a derivada do resultado e verifique que é igual à função que está dentro da integral.
- (e) Explique as restrições para n e a dos itens (ii) e (vi).
- (f) Você viu no estudo de derivadas que a derivada de $\ln x$ é $\frac{1}{x}$. De acordo com o que vimos, então a integral de $\frac{1}{x}$ deveria ser $\ln x$. Como você justifica a presença do módulo no item (iii)?
- (g) Os itens (xiv), (xv) e (xvi) não nos dão integrais imediatas, são propriedades que usamos durante o cálculo de uma integral. Basicamente, elas nos dizem que escalares podem sair de dentro da integral, que a integral da soma é a soma das integrais e que a integral da diferença é a diferença das integrais. Diga se há algo de errado no cálculo abaixo e justifique por que a constante ao final ficou $4C$ e não apenas C .

$$\int (3x^2 + 2) dx = \int 3x^2 dx + \int 2 dx = 3 \int x^2 dx + \int 2 dx = 3 \left(\frac{x^3}{3} + C \right) + 2x + C = x^3 + 2x + 4C.$$

P7. Utilize a tabela do exercício acima para calcular as integrais indefinidas abaixo.

- | | |
|--|---|
| (a) $\int (x^2 + 2x - 4) dx.$ | (b) $\int (1 - 8x^3 + 16x^7) dx.$ |
| (c) $\int (\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + x^{4/5}) dx.$ | (d) $\int (1 - x)(2 + x^2) dx.$ |
| (e) $\int \left(\frac{4}{x} - \frac{3}{x^3} + \frac{2}{\sqrt{x}} \right) dx.$ | (f) $\int \left(2 \sin x - 3 \cos x + \frac{\sec^2 x}{7} \right) dx.$ |
| (g) $\int (e^x - 4e^{x+1} + 3 \cdot 2^x) dx.$ | (h) $\int \left(\frac{3}{1 + x^2} - \operatorname{tg}^2 x \right) dx.$ |
| (i) $\int \frac{2 + x^2}{\sqrt{x}} dx.$ | (j) $\int \frac{3}{2\sqrt{1 - x^2}} dx.$ |

P8. Use o item (i) do exercício anterior para resolver a equação diferencial $y'(x) = \frac{2 + x^2}{\sqrt{x}}$ com a condição inicial $y(1) = 10$.

P9. Seja f uma função que satisfaz $f^{(3)}(x) = 1 + \cos x$. Determine a versão mais geral possível para f .

P10. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável. Determine $b \in \mathbb{R}$ sabendo que

$$\int f(x) dx = 3x^{4/3} + b \arctg(x) - 2x + C$$

e que $f(1) = 5$.



Cálculo 1 (MTM3101 e MTM3110)

Gabarito da Lista 4.2

Primitivas

Última atualização: 22 de junho de 2022.

Exercícios Principais

P1. F é uma primitiva de f . Assumindo que estamos trabalhando em um domínio que é um intervalo, então $F(x) + C$, em que C é uma constante, representa todas as possíveis primitivas de f (cada valor de C diferente dá origem a uma primitiva diferente). A integral indefinida de f é uma primitiva genérica, isto é, $\int f(x)dx = F(x) + C$. Note que o resultado da integral indefinida é uma função (ou uma família de funções se pensarmos para cada C diferente), enquanto o da integral definida é um número.

P2. f é uma primitiva de f' . Assumindo que estamos trabalhando em um domínio que é um intervalo, então $f(x) + C$, em que C é uma constante, representa todas as possíveis primitivas de f' (cada valor de C diferente dá origem a uma primitiva diferente). A integral indefinida de f' é uma primitiva genérica, isto é, $\int f'(x)dx = f(x) + C$.

P3.

(a) Há infinitas primitivas possíveis. Três delas são:

$$F_1(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 7x, \quad F_2(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 7x + 1 \quad \text{e} \quad F_3(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 7x + 2.$$

(b) $F(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 7x + C.$

(c) $F(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 7x - \frac{41}{2}.$

P4.

(a) $F(x) = x \arcsen x + \sqrt{1 - x^2}.$

(b) $F(x) = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1 + x^2).$

(c) $F(x) = \frac{1}{2} \left(R^2 \arcsen\left(\frac{x}{R}\right) + x\sqrt{R^2 - x^2} \right).$ Olhando para as respostas desse exercício, fica evidente que o problema de encontrar primitivas não é tão simples. As que encontramos nesse exercício foi porque já tínhamos o resultado pronto lá da lista *Derivada da função inversa*. Nessa lista de exercício e em várias próximas, veremos técnicas para encontrar integrais indefinidas (que, basicamente, é o mesmo que encontrar primitivas). Já alertamos que os métodos são consideravelmente mais trabalhosos do que os métodos para calcular derivada. Além disso, não são todas as funções para as quais é possível escrever explicitamente uma primitiva (e também não é fácil saber quando é possível).

P5.

- (a) $\int \arcsen x \, dx = x \arcsen x + \sqrt{1 - x^2} + C.$
- (b) $\int \arctg x \, dx = x \arctg x - \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) + C.$
- (c) $\int \sqrt{R^2 - x^2} \, dx = \frac{1}{2} \left(R^2 \arcsen\left(\frac{x}{R}\right) + x\sqrt{R^2 - x^2} \right) + C.$

P6.

- (a) Quando $\int f(x) \, dx = F(x) + C$, sabemos que F é uma primitiva para f . Assim, a resposta de uma integral indefinida está correta quando calculamos a derivada de F e o resultado é f .
- (b) $\int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| + C;$
 $\int \frac{1}{1 + x^2} \, dx = \arctg x + C;$
 $\int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \, dx = \arcsen x + C.$
- (c) $\int 1 \, dx$ ou $\int dx$. Na última notação, interpreta-se que há um produto $1 \, dx$ que é igual a dx .
- (d)
- (e) A restrição para a no item (vi) é apenas pela construção da função exponencial que só definimos com $a > e$ e $a \neq 1$. Já a restrição $n \neq -1$ no item (ii) primeiro deve ser entendida como uma restrição à própria expressão. Como $n + 1$ é um denominador, então não podemos ter $n = -1$. Outra forma de interpretar é que quando queremos integrar $x^{-1} = \frac{1}{x}$, devemos procurar por uma função cuja derivada é igual a $x^{-1} = \frac{1}{x}$, e sabemos que tal função é o logaritmo natural e não uma potência de x .
- (f) A explicação está em uma análise de domínios. Sejam $f(x) = \ln x$, $g(x) = \ln(-x)$ e $h(x) = \ln|x|$. Observemos que $\text{Dom}(f) = (0, \infty)$, $\text{Dom}(g) = (-\infty, 0)$ e $\text{Dom}(h) = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$. Vamos calcular a derivada de cada uma delas: $f'(x) = \frac{1}{x}$ e $g'(x) = \frac{-1}{-x} = \frac{1}{x}$. Como $h(x) = f(x)$ se $x > 0$ e $h(x) = g(x)$ se $x < 0$, então $h'(x) = \frac{1}{x}$. Todas possuem a mesma derivada, mas como cada uma tem domínio diferente, então suas derivadas são válidas em domínios diferentes. Em resumo:
- A derivada de $f(x) = \ln x$ é $f'(x) = \frac{1}{x}$ e é válida em $\text{Dom}(f) = (0, \infty)$;
 - A derivada de $g(x) = \ln(-x)$ é $g'(x) = \frac{1}{x}$ e é válida em $\text{Dom}(g) = (-\infty, 0)$;
 - A derivada de $h(x) = \ln|x|$ é $h'(x) = \frac{1}{x}$ e é válida em $\text{Dom}(h) = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

Se olharmos para a função $\frac{1}{x}$ apenas em $(0, \infty)$, então $\ln x$ é a integral. Mas se olharmos $\frac{1}{x}$ em todo o seu domínio que é $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$, devemos usar a integral que está definida em todo o seu domínio que é $\ln|x|$.

- (g) Dependendo do ponto de vista, há ou não há erros no desenvolvimento. As únicas considerações são sobre o uso da constante. Quando resolvemos uma integral, a constante usada não necessariamente é a mesma usada na outra. Assim, a rigor, deveríamos ter usado

$$3 \int x^2 \, dx + \int 2 \, dx = 3 \left(\frac{x^3}{3} + C_1 \right) + 2x + C_2.$$

Esse seria o possível erro no desenvolvimento. Mas quando juntamos todas as constantes que aparecerem de todas as integrais, podemos trocar todas elas por uma única constante C . Então em desenvolvimentos nos quais você separa uma integral em várias menores, é mais prático e adequado não usar a constante nas integrais menores, apenas um único $+C$ ao final, conforme desenvolvimento abaixo:

$$\int (3x^2 + 2) dx = \int 3x^2 dx + \int 2 dx = 3 \int x^2 dx + \int 2 dx = 3 \cdot \frac{x^3}{3} + 2x + C = x^3 + 2x + C.$$

P7.

$$(a) \int (x^2 + 2x - 4) dx = \frac{x^3}{3} + x^2 - 4x + C.$$

$$(b) \int (1 - 8x^3 + 16x^7) dx = x - 2x^4 + 2x^8 + C.$$

$$(c) \int (\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + x^{4/5}) dx = \frac{2x^{3/2}}{3} + \frac{3x^{4/3}}{4} + \frac{5x^{9/5}}{9} + C.$$

$$(d) \int (1 - x)(2 + x^2) dx = -\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - x^2 + 2x + C.$$

$$(e) \int \left(\frac{4}{x} - \frac{3}{x^3} + \frac{2}{\sqrt{x}} \right) dx = 4 \ln|x| + \frac{3}{2x^2} + 4\sqrt{x} + C.$$

$$(f) \int \left(2 \operatorname{sen} x - 3 \cos x + \frac{\sec^2 x}{7} \right) dx = -2 \cos x - 3 \operatorname{sen} x + \frac{\operatorname{tg} x}{7} + C.$$

$$(g) \int (e^x - 4e^{x+1} + 3 \cdot 2^x) dx = e^x - 4e^{x+1} + \frac{3 \cdot 2^x}{\ln 2} + C.$$

$$(h) \int \left(\frac{3}{1+x^2} - \operatorname{tg}^2 x \right) dx = 3 \operatorname{arctg} x + x - \operatorname{tg} x + C.$$

$$(i) \int \frac{2+x^2}{\sqrt{x}} dx = 4x^{1/2} + \frac{2x^{5/2}}{5} + C = 4\sqrt{x} + \frac{2x^2\sqrt{x}}{5} + C.$$

$$(j) \int \frac{3}{2\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{3 \operatorname{arcsen} x}{2} + C.$$

$$\mathbf{P8.} \quad y(x) = 4\sqrt{x} + \frac{2x^2\sqrt{x}}{5} + \frac{28}{5}.$$

$$\mathbf{P9.} \quad f(x) = a + bx + cx^2 + \frac{x^3}{6} - \operatorname{sen} x.$$

$$\mathbf{P10.} \quad b = 6.$$