Universidade Federal de Santa Catarina
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas
Departamento de Matemática

Cálculo 1 (MTM3101 e MTM3110)

Lista 4.3 - O Segundo Teorema Fundamental do Cálculo

Última atualização: 22 de junho de 2022.

Exercícios Principais

P1. Seja F uma função cuja derivada é f. Explique integral definida usando F e f.

P2. Calcule as integrais definidas abaixo. *Sugestão.* Veja que todas as integrais indefinidas necessárias já foram calculadas no exercício 7 da lista de exercícios 4.2.

(a) $\displaystyle\int_0^2 (x^2 + 2x - 4)\,dx.$

(b) $\displaystyle\int_{-1}^1 (1 - 8x^3 + 16x^7)\,dx.$

(c) $\displaystyle\int_0^1 (\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + x^{4/5})\,dx.$

(d) $\displaystyle\int_2^1 (1 - x)(2 + x^2)\,dx.$

(e) $\displaystyle\int_1^4 \left(\frac{4}{x} - \frac{3}{x^3} + \frac{2}{\sqrt{x}}\right) dx.$

(f) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \left(2\,\mathrm{sen}\,x - 3\cos x + \frac{\sec^2 x}{7}\right) dx.$

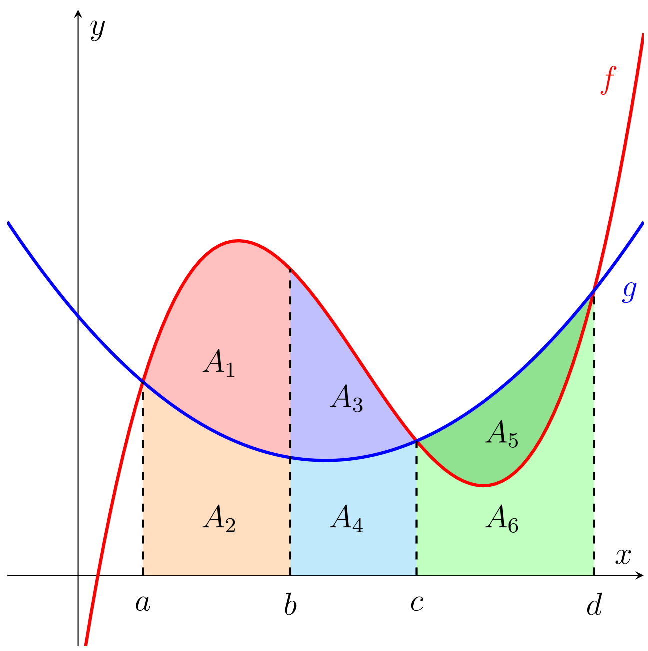
(g) $\displaystyle\int_{-2}^0 (e^x - 4e^{x+1} + 3 \cdot 2^x)\,dx.$

(h) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{3}{2\sqrt{1 - x^2}}\,dx.$

P3. Mostre que a área de um círculo de raio R é πR^2.

P4. Expresse, em termos de uma integral, o deslocamento de um objeto entre os instantes de tempo t_1 e t_2 sabendo que sua função velocidade é $v(t)$.

P5. Considere as funções f e g representadas abaixo. Em cada região marcada, está indicada a medida da área.



(a) Escreva o resultado das integrais $\int_a^b f(x)dx$, $\int_b^c f(x)dx$, $\int_c^d f(x)dx$, $\int_a^b g(x)dx$, $\int_b^c g(x)dx$ e $\int_c^d g(x)dx$ em termos das medidas das áreas.

(b) Escreva as áreas A_1, A_3 e A_5 em termos de integrais.

Exercícios Complementares

C1. Seja f uma função. Explique integral definida usando f e f'.

C2. O que há de errado no desenvolvimento

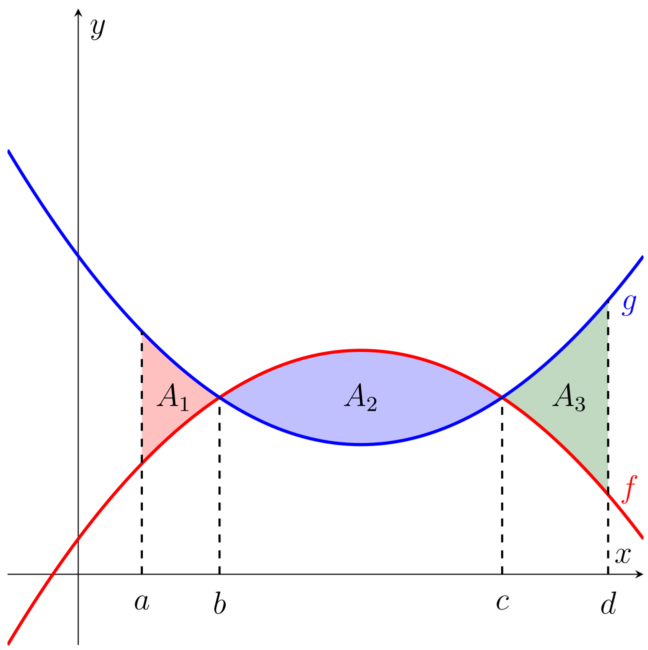
$$\int_{-2}^{1} x^{-4}\,dx = \left.\frac{x^{-3}}{-3}\right|_{-2}^{1} = -\frac{3}{8} \quad ?$$

C3. Se uma partícula P está sob a ação de uma força F que é paralela ao deslocamento de P, então o trabalho realizado pela força F entre as posições x_1 e x_2 é dado por

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F(x)dx.$$

Note que nessa expressão, a força F é uma função da posição x. Suponha que a função posição de P é $x(t) = 2t + 1$ e que a força em função do tempo é $F(t) = 3t^2 + t - 1$. Determine o trabalho realizado pela força F entre as posições $x_1 = 3$ e $x_2 = 7$.

C4. Considere as funções f e g representadas abaixo. Em cada região marcada, está indicada a medida da área.



(a) Qual é a área da região limitada pelas funções f e g e pela reta $x = a$? Qual integral descreve essa área?

(b) Qual é a área da região limitada pelas funções f e g e pela reta $x = d$? Qual integral descreve essa área?

(c) Qual é a área da região limitada pelas funções f e g? Qual integral descreve essa área?

(d) Descreva um procedimento para calcular as áreas descritas nos itens acima sem ter o gráfico em mãos?

C5. Sejam $f(x) = x^2 - 8x + 17$ e $g(x) = x - 1$.

(a) Determine a área da região limitada pelas funções f e g e pela reta $x = 2$.

(b) Determine a área da região limitada pelas funções f e g.

Universidade Federal de Santa Catarina
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas
Departamento de Matemática

Cálculo 1 (MTM3101 e MTM3110)

Gabarito da Lista 4.3

O Segundo Teorema Fundamental do Cálculo

Última atualização: 22 de junho de 2022.

Exercícios Principais

P1. $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$

P2.

(a) $\displaystyle\int_0^2 (x^2 + 2x - 4)\, dx = \left(\frac{x^3}{3} + x^2 - 4x\right)\Big|_0^2 = -\frac{4}{3}.$

(b) $\displaystyle\int_{-1}^1 (1 - 8x^3 + 16x^7)\, dx = \left(x - 2x^4 + 2x^8\right)\Big|_{-1}^1 = 2.$

(c) $\displaystyle\int_0^1 (\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + x^{4/5})\, dx = \left(\frac{2x^{3/2}}{3} + \frac{3x^{4/3}}{4} + \frac{5x^{9/5}}{9}\right)\Big|_0^1 = \frac{71}{36}.$

(d) $\displaystyle\int_2^1 (1 - x)(2 + x^2)\, dx = \left(-\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - x^2 + 2x\right)\Big|_2^1 = \frac{29}{12}.$

(e) $\displaystyle\int_1^4 \left(\frac{4}{x} - \frac{3}{x^3} + \frac{2}{\sqrt{x}}\right) dx = \left(4\ln|x| + \frac{3}{2x^2} + 4\sqrt{x}\right)\Big|_1^4 = \frac{83}{32} + 8\ln 2.$

(f) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \left(2\operatorname{sen} x - 3\cos x + \frac{\sec^2 x}{7}\right) dx = \left(-2\cos x - 3\operatorname{sen} x + \frac{\operatorname{tg} x}{7}\right)\Big|_0^{\pi/4} = \frac{15}{7} - \frac{5}{\sqrt{2}}.$

(g) $\displaystyle\int_{-2}^0 (e^x - 4e^{x+1} + 3\cdot 2^x)\, dx = \left(e^x - 4e^{x+1} + \frac{3\cdot 2^x}{\ln 2}\right)\Big|_{-2}^0 = 1 - 4e + \frac{4}{e} - \frac{1}{e^2} + \frac{9}{4\ln 2}.$

(h) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{3}{2\sqrt{1-x^2}}\, dx = \left(\frac{3\operatorname{arcsen} x}{2}\right)\Big|_0^{\sqrt{2}/2} = \frac{3\pi}{8}.$

P3. Considere a função $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$, com $-R \leq x \leq R$. O gráfico de f é uma semicircunferência centrada na origem de raio R. Portanto, a área entre o gráfico de f e o eixo x (limitada lateralmente em $x = -R$ e $x = R$) é metade da área do círculo. Mas essa área pode ser calculada por uma integral:

$$\int_{-R}^R \sqrt{R^2 - x^2}\, dx = \frac{1}{2}\left(R^2 \operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{R}\right) + x\sqrt{R^2 - x^2}\right)\Big|_{-R}^R = \frac{\pi R^2}{2}.$$

Como esta integral é metade da área do círculo, então a área do círculo é πR^2.

P4. $\displaystyle s(t_2) - s(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt.$

P5.

(a) $\int_a^b f(x)dx = A_1 + A_2, \quad \int_b^c f(x)dx = A_3 + A_4, \quad \int_c^d f(x)dx = A_6;$
$\int_a^b g(x)dx = A_2, \quad \int_b^c g(x)dx = A_4, \quad \int_c^d g(x)dx = A_5 + A_6.$

(b) $A_1 = \int_a^b (f(x) - g(x))dx, \quad A_3 = \int_b^c (f(x) - g(x))dx \quad \text{e} \quad A_5 = \int_c^d (g(x) - f(x))dx.$

Exercícios Complementares

C1. $\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a).$

C2. A função x^{-4} no integrando não está definida no intervalo de integração $[-2, 1]$, pois não está definida em $x = 0$.

C3. **Solução 1.** Como o trabalho é calculado usando a força como função da posição, precisaremos encontrar $F(x)$. Isolando t na função posição, obtemos $t = \dfrac{x-1}{2}$. Substituindo na expressão da força, obtemos

$$F(x) = 3\left(\frac{x-1}{2}\right)^2 + \frac{x-1}{2} - 1 = \frac{3x^2}{4} - x - \frac{3}{4}.$$

Assim, o trabalho é

$$W = \int_3^7 \left(\frac{3x^2}{4} - x - \frac{3}{4}\right) dx = \left(\frac{x^3}{4} - \frac{x^2}{2} - \frac{3x}{4}\right)\Bigg|_3^7 = 56.$$

Solução 2. Apesar de o trabalho estar definido como uma integral sobre a posição, podemos calcular como uma integral sobre o tempo. Usaremos uma ideia informal aqui que será vista em detalhe nas próximas aulas e listas: a resolução de integrais por substituição de variável. O primeiro passo é encontrar quem são os limites de integração na variável t. Como $x_1 = 3$ e $x(t) = 2t + 1$, então o valor de t que retorna $x = 3$ é $t_1 = 1$. Fazendo o mesmo para $x_2 = 7$, obtemos $t_2 = 3$. O segundo passo é reescrever a integral trocando o dx por alguma relação com dt. Apesar de dx ser apenas uma notação na integral, podemos pensar que ele é o mesmo dx que aparece na notação para derivada. Por exemplo, como $x(t) = 2t+1$, então $dx/dt = 2$ e, portanto, $dx = 2dt$. Curiosamente, se trocarmos dx por $2dt$ na integral, a integral resolvida na variável t tem o mesmo resultado já obtido na solução 1. A resolução fica assim:

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F(x)dx = \int_1^3 (3t^2 + t - 1)2dt = (2t^3 + t^2 - 2t)\Big|_1^3 = 56.$$

C4.

(a) $A_1 = \int_a^b (g(x) - f(x))\, dx.$

(b) $A_3 = \int_c^d (g(x) - f(x))\, dx.$

(c) $A_2 = \int_b^c (f(x) - g(x))\, dx.$

(d) Primeiramente, encontrar os pontos de interseção entre o gráfico de f e g resolvendo a equação $f(x) = g(x)$. No gráfico acima, as soluções são b e c. Depois disso, um esboço dos gráficos deve ser feito. A região descrita no item (a) é a única região que fica limitada pelas funções e pela reta $x = a$. Observe que só sabemos que essa região termina em $x = b$ porque calculamos previamente os pontos de interseção entre os gráficos. Após isso, a área A_1 é determinada pela integral de a até b da diferença das funções, observando que é a que está por cima menos a que está por baixo. Um raciocínio similar se aplica à região descrita no item (b). Já para o item (c), observe que nenhuma limitação lateral foi fornecida. Assim, a região procurara é a única que fica limitada somente pelos gráficos de f e g, sem qualquer outra curva. Como já havíamos determinado os pontos de interseção, então já temos os extremos laterais b e c dessa área. Por fim, basta fazer a integral da diferença, observando que neste caso a função f está por cima, então devemos fazer a integral de $f(x) - g(x)$.

C5.

(a) $\displaystyle\int_2^3 (f(x) - g(x))\,dx = \int_2^3 (x^2 - 9x + 18)\,dx = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{9x^2}{2} + 18x\right)\Big|_2^3 = \frac{11}{6}.$

(b) $\displaystyle\int_3^6 (g(x) - f(x))\,dx = \int_3^6 (-x^2 + 9x - 18)\,dx = \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{9x^2}{2} - 18x\right)\Big|_3^6 = \frac{9}{2}.$