Universidade Federal de Santa Catarina
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas
Departamento de Matemática

Cálculo 1 (MTM3101 e MTM3110)

Lista 4.4 - Regra da substituição para integrais indefinidas

Última atualização: 22 de junho de 2022.

Exercícios Principais

P1. Em geral, a regra da substituição de variável não aparece nas tabelas de integrais. Precisamos saber que uma integral em uma determinada variável (por exemplo x) pode ser escrita em uma outra variável (por exemplo u) se fizermos todas as substituições na função a ser integrada e também no termo dx. Como exemplo, considere $u = 1 + \ln x$.

(a) Calcule a derivada de u.

(b) Escreva du em função de x e dx.

(c) Escreva dx em termos de du e x.

(d) Escreva x em termos de u.

(e) Escreva du em termos de u e dx.

(f) Escreva dx em termos de du e u.

(g) Refaça todo os itens iniciando pela expressão obtida no item (d).

(h) Use a substituição do enunciado para resolver a integral $\displaystyle\int \frac{1}{3x(1+\ln x)}\,dx$.

(i) Use a substituição do enunciado para resolver a integral $\displaystyle\int \frac{\ln x}{3x(1+\ln x)}\,dx$.

P2. Calcule as integrais indefinidas abaixo.

(a) $\displaystyle\int e^{-5x}\,dx$.

(b) $\displaystyle\int \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx$.

(c) $\displaystyle\int (e^{ax} - \operatorname{sen}(ax))\,dx$, $a \neq 0$.

(d) $\displaystyle\int x^2\sqrt{x^3+1}\,dx$.

(e) $\displaystyle\int (\sec^2(2x) + x^2 e^{x^3})\,dx$.

(f) $\displaystyle\int x^2(4-x^3)^{2/3}\,dx$.

(g) $\displaystyle\int \frac{e^x}{(1-e^x)^2}\,dx$.

(h) $\displaystyle\int \frac{(\ln x)^2}{x}\,dx$.

(i) $\displaystyle\int \operatorname{sen} x \operatorname{sen}(\cos x)\,dx$.

(j) $\displaystyle\int (x^2+1)(x^3+3x)^4\,dx$.

(k) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,dx$.

(l) $\displaystyle\int \frac{dx}{ax+b}$, $a \neq 0$.

(m) $\displaystyle\int \operatorname{tg} x\,dx$.

(n) $\displaystyle\int (1 + x^2 - 5xe^{-3x^2})\,dx$.

(o) $\displaystyle\int \left(\frac{2x^2}{x^3+5} - \frac{3x}{x^2-10}\right)dx$.

(p) $\displaystyle\int x(2x+5)^8\,dx$.

Exercícios Complementares

C1. Calcule as integrais indefinidas abaixo.

(a) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2 x \cos x \, dx.$ **(b)** $\displaystyle\int \cos^n x \operatorname{sen} x \, dx,\ n \neq -1.$ **(c)** $\displaystyle\int \frac{x^3}{x^4 - 5} \, dx.$

(d) $\displaystyle\int \operatorname{sen} x \sqrt{1 + \cos x} \, dx.$ **(e)** $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \, dx.$ **(f)** $\displaystyle\int e^{\cos x} \operatorname{sen} x \, dx.$

(g) $\displaystyle\int \sqrt[3]{1 + 7x} \, dx.$ **(h)** $\displaystyle\int \frac{e^{1/x}}{x^2} \, dx.$ **(i)** $\displaystyle\int \frac{1}{\operatorname{arcsen} x \sqrt{1 - x^2}} \, dx.$

(j) $\displaystyle\int \frac{a + bx^2}{3ax + bx^3} \, dx.$ **(k)** $\displaystyle\int \frac{1}{(1 + \sqrt{x})^4} \, dx.$ **(l)** $\displaystyle\int x \sqrt{x - 4} \, dx.$

(m) $\displaystyle\int x^3 (x^2 + 3)^{10} \, dx.$

C2. Utilize as relações trigonométricas

$$\textbf{(i)}\ \operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x, \qquad \textbf{(ii)}\ \sec^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x,$$

$$\textbf{(iii)}\ \cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2} \quad \text{e} \quad \textbf{(iv)}\ \operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$$

para calcular as integrais abaixo.

(a) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^3 x \, dx.$ **(b)** $\displaystyle\int \operatorname{tg}^3 x \sec^4 x \, dx.$ **(c)** $\displaystyle\int \cos^2 x \, dx.$

(d) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2 x \, dx.$ **(e)** $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2(\pi x) \, dx.$

C3. Complete o quadrado na expressão $x^2 + 4x + 5$ e faça a substituição $u = x + 2$ para calcular a integral $\displaystyle\int \frac{1}{x^2 + 4x + 5} \, dx.$

C4. Observe que $\sec x = \dfrac{\sec x \operatorname{tg} x + \sec^2 x}{\sec x + \operatorname{tg} x}$ e faça a substituição $u = \sec x + \operatorname{tg} x$ para calcular a integral $\displaystyle\int \sec x \, dx.$

C5. Utilize o exercício anterior para calcular a integral $\displaystyle\int \sec(2x) \, dx.$

Universidade Federal de Santa Catarina
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas
Departamento de Matemática

Cálculo 1 (MTM3101 e MTM3110)

Gabarito da Lista 4.4

Regra da substituição para integrais indefinidas

Última atualização: 22 de junho de 2022.

Exercícios Principais

P1.

(a) $u' = du/dx = \dfrac{1}{x}$.

(b) $du = \dfrac{dx}{x}$.

(c) $dx = x du$.

(d) $x = e^{u-1}$.

(e) $du = \dfrac{dx}{e^{u-1}}$.

(f) $dx = e^{u-1} du$.

(g) $x' = dx/du = e^{u-1}$, $\quad dx = e^{u-1}du$, $\quad du = \dfrac{dx}{e^{u-1}}$, $\quad u = 1 + \ln x$, $\quad dx = x du$, $\quad du = \dfrac{dx}{x}$.

(h) $\displaystyle\int \frac{1}{3x(1+\ln x)}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{1+\ln x}\frac{dx}{x} = \frac{1}{3}\int \frac{1}{u}\,du = \frac{\ln|u|}{3} + C = \frac{\ln|1+\ln x|}{3} + C.$

(i) $\displaystyle\int \frac{\ln x}{3x(1+\ln x)}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{\ln x}{1+\ln x}\frac{dx}{x} = \frac{1}{3}\int \frac{u-1}{u}\,du = \frac{1}{3}\int \left(1 - \frac{1}{u}\right)du = \frac{u}{3} - \frac{\ln|u|}{3} + C = \frac{1+\ln x}{3} - \frac{\ln|1+\ln x|}{3} + C.$ *Observação.* A resposta obtida aqui é a mesma se retirarmos a constante $1/3$ e embutirmos na constante C. Assim, $\dfrac{\ln x}{3} - \dfrac{\ln|1+\ln x|}{3} + C$ também é uma possível resposta.

P2.

(a) $\displaystyle\int e^{-5x}\,dx = -\frac{e^{-5x}}{5} + C.$

(b) $\displaystyle\int \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx = \frac{2\operatorname{sen}(\frac{\pi x}{2})}{\pi} + C.$

(c) $\displaystyle\int (e^{ax} - \operatorname{sen}(ax))\,dx = \frac{e^{ax} + \cos(ax)}{a} + C.$

(d) $\displaystyle\int x^2\sqrt{x^3+1}\,dx = \frac{2(x^3+1)^{3/2}}{9} + C.$

(e) $\displaystyle\int (\sec^2(2x) + x^2 e^{x^3})\,dx = \frac{\operatorname{tg}(2x)}{2} + \frac{e^{x^3}}{3} + C.$

(f) $\displaystyle\int x^2(4-x^3)^{2/3}\,dx = -\frac{(4-x^3)^{5/3}}{5} + C.$

(g) $\displaystyle\int \frac{e^x}{(1-e^x)^2}\,dx = \frac{1}{1-e^x} + C.$

(h) $\displaystyle\int \frac{(\ln x)^2}{x}\,dx = \frac{(\ln x)^3}{3} + C.$

(i) $\displaystyle\int \operatorname{sen} x \operatorname{sen}(\cos x)\,dx = \cos(\cos x) + C.$

(j) $\displaystyle\int (x^2+1)(x^3+3x)^4\,dx = \frac{(x^3+3x)^5}{15} + C.$

(k) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,dx = \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{2} + C.$

(l) $\displaystyle\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{\ln|ax+b|}{a} + C.$

(m) $\displaystyle\int \operatorname{tg} x\,dx = -\ln|\cos x| + C.$

(n) $\displaystyle\int (1+x^2-5xe^{-3x^2})\,dx = x + \frac{x^3}{3} + \frac{5e^{-3x^2}}{6} + C.$

(o) $\displaystyle\int \left(\frac{2x^2}{x^3+5} - \frac{3x}{x^2-10}\right)dx = \frac{2\ln|x^3+5|}{3} - \frac{3\ln|x^2-10|}{2} + C.$

(p) $\displaystyle\int x(2x+5)^8\,dx = \frac{(2x+5)^{10}}{40} - \frac{5(2x+5)^9}{36} + C = \frac{(18x-5)(2x+5)^9}{360} + C.$

Exercícios Complementares

C1.

(a) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2 x \cos x\,dx = \frac{\operatorname{sen}^3 x}{3} + C.$

(b) $\displaystyle\int \cos^n x \operatorname{sen} x\,dx = -\frac{\cos^{n+1} x}{n+1} + C.$

(c) $\displaystyle\int \frac{x^3}{x^4-5}\,dx = \frac{\ln|x^4-5|}{4} + C.$

(d) $\displaystyle\int \operatorname{sen} x\sqrt{1+\cos x}\,dx = -\frac{2(1+\cos x)^{3/2}}{3} + C.$

(e) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx = -2\cos\sqrt{x} + C.$

(f) $\displaystyle\int e^{\cos x}\operatorname{sen} x\,dx = -e^{\cos x} + C.$

(g) $\displaystyle\int \sqrt[3]{1+7x}\,dx = \frac{3(1+7x)^{4/3}}{28} + C.$

(h) $\displaystyle\int \frac{e^{1/x}}{x^2}\,dx = -e^{1/x} + C.$

(i) $\displaystyle\int \frac{1}{\operatorname{arcsen} x\sqrt{1-x^2}}\,dx = \ln|\operatorname{arcsen} x| + C.$

(j) $\displaystyle\int \frac{a+bx^2}{3ax+bx^3}\,dx = \frac{\ln|3ax+bx^3|}{3} + C.$

(k) $\displaystyle\int \frac{1}{(1+\sqrt{x})^4}\,dx = \frac{2}{3(1+\sqrt{x})^3} - \frac{1}{(1+\sqrt{x})^2} + C = -\frac{1+3\sqrt{x}}{3(1+\sqrt{x})^3} + C.$

(l) $\displaystyle\int x\sqrt{x-4}\,dx = \frac{2(x-4)^{5/2}}{5} + \frac{8(x-4)^{3/2}}{3} + C = \frac{2(3x+8)(x-4)^{3/2}}{15} + C.$

(m) $\displaystyle\int x^3(x^2+3)^{10}\,dx = \frac{(x^2+3)^{12}}{24} - \frac{3(x^2+3)^{11}}{22} + C = \frac{(11x^2-3)(x^2+3)^{11}}{264} + C.$

C2.

(a) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^3 x\,dx = \int (1-\cos^2 x)\operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + C.$

(b) $\displaystyle\int \operatorname{tg}^3 x \sec^4 x\,dx = \int \operatorname{tg}^3 x(1+\operatorname{tg}^2 x)\sec^2 x\,dx = \frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} + \frac{\operatorname{tg}^6 x}{6} + C.$

(c) $\displaystyle\int \cos^2 x\,dx = \int \left(\frac{1+\cos(2x)}{2}\right)dx = \frac{x}{2} + \frac{\operatorname{sen}(2x)}{4} + C.$

(d) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2 x\,dx = \int \left(\frac{1-\cos(2x)}{2}\right)dx = \frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen}(2x)}{4} + C.$

(e) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2(\pi x)\,dx = \frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen}(2\pi x)}{4\pi} + C.$

C3. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+4x+5}\,dx = \int \frac{1}{1+(x+2)^2}\,dx = \operatorname{arctg}(x+2) + C.$

C4. $\displaystyle\int \sec x\,dx = \int \frac{\sec x \operatorname{tg} x + \sec^2 x}{\sec x + \operatorname{tg} x}\,dx = \ln|\sec x + \operatorname{tg} x| + C.$

C5. $\displaystyle\int \sec(2x)\,dx = \frac{\ln|\sec(2x)+\operatorname{tg}(2x)|}{2} + C.$