



Cálculo 1 (MTM3101 e MTM3110)

Lista 4.5 - Regra da substituição para integrais definidas

Última atualização: 22 de junho de 2022.

Exercícios Principais

P1. Calcule a integral definida $\int_1^2 \frac{1}{3x(1 + \ln x)} dx$ de duas formas: (1) usando a integral indefinida e substituindo os índices e (2) reescrevendo a integral definida na variável u . *Sugestão.* Veja que a integral indefinida já foi calculada na lista de exercícios 4.4.

P2. Calcule as integrais definidas abaixo (se possível, calcule pelas duas formas citadas acima).

(a) $\int_0^1 e^{-5x} dx.$

(b) $\int_1^3 \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) dx.$

(c) $\int_{-1}^2 x^2 \sqrt{x^3 + 1} dx.$

(d) $\int_1^e \frac{(\ln x)^2}{x} dx.$

(e) $\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{1 + x^2} dx.$

(f) $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \operatorname{tg} x dx.$

(g) $\int_0^1 x(2x + 5)^8 dx.$

P3. O tratamento por diálise remove a ureia e outros produtos residuais do sangue de um paciente, desviando parte do fluxo sanguíneo externamente por uma máquina chamada dialisador. A taxa na qual a ureia é removida do sangue (em mg/min) é em geral descrita pela equação

$$u(t) = \frac{C_0 r}{V} e^{-rt/V},$$

em que r é a taxa de fluxo de sangue pelo dialisador (em ml/min), V é o volume de sangue do paciente (em ml) e C_0 é a quantidade inicial de ureia no sangue (em mg). Calcule a integral $\int_0^{30} u(t) dt$ e interprete-a.

P4. Considere um objeto cuja função velocidade é dada por $v(t) = 5\pi \sin(2\pi t)$, em que t é medido em segundos e a velocidade em metros por segundo.

(a) Calcule $\int_0^1 v(t) dt$ e interprete o resultado fisicamente.

(b) Calcule $\int_0^1 |v(t)| dt$ e interprete o resultado fisicamente.

P5. Determine $d \in \mathbb{R}$ de modo que

$$\int_{-1}^0 x \sqrt[3]{x+1} dx = -\frac{9}{d}.$$

Exercícios Complementares

C1. Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $\int_1^{16} f(x) dx = 36$. Calcule $\int_1^8 f(x\sqrt[3]{x})\sqrt[3]{x} dx$.

C2. Calcule as integrais definidas abaixo.

(a) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2 x \cos x dx.$ (b) $\int_0^{\pi/2} \sin x \sqrt{1 + \cos x} dx.$ (c) $\int_{-\pi}^{\pi} e^{\cos x} \sin x dx.$

(d) $\int_0^1 \sqrt[3]{1+7x} dx.$ (e) $\int_5^8 x\sqrt{x-4} dx.$

C3. Calcule a integral $\int_{-1}^1 \frac{x^{53} \cos^{22} x}{1 + 2x^2 + x^8} dx.$

C4. Seja f uma função contínua tal que $\int_0^9 f(x) dx = 4$. Calcule $\int_0^3 x f(x^2) dx.$



Cálculo 1 (MTM3101 e MTM3110)

Gabarito da Lista 4.5

Regra da substituição para integrais definidas

Última atualização: 22 de junho de 2022.

Exercícios Principais

P1.

$$(1) \int_1^2 \frac{1}{3x(1+\ln x)} dx = \left. \frac{\ln|1+\ln x|}{3} \right|_1^2 = \frac{\ln|1+\ln 2|}{3} - \frac{\ln|1+\ln 1|}{3} = \frac{\ln(1+\ln 2)}{3}.$$

$$(2) \int_1^2 \frac{1}{3x(1+\ln x)} dx = \int_1^{1+\ln 2} \frac{1}{3u} du = \left. \frac{\ln|u|}{3} \right|_1^{1+\ln 2} = \frac{\ln|1+\ln 2|}{3} - \frac{\ln|1|}{3} = \frac{\ln(1+\ln 2)}{3}.$$

P2.

$$(a) \int_0^1 e^{-5x} dx = \frac{1}{5} - \frac{1}{5e^5}.$$

$$(b) \int_1^3 \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) dx = -\frac{4}{\pi}.$$

$$(c) \int_{-1}^2 x^2 \sqrt{x^3+1} dx = 6.$$

$$(d) \int_1^e \frac{(\ln x)^2}{x} dx = \frac{1}{3}.$$

$$(e) \int_0^1 \frac{\arctg x}{1+x^2} dx = \frac{\pi^2}{32}.$$

$$(f) \int_{\pi/6}^{\pi/3} \operatorname{tg} x dx = \frac{\ln 3}{2}.$$

$$(g) \int_0^1 x(2x+5)^8 dx = \frac{13 \cdot 7^9 + 5^{10}}{360}.$$

P3. $\int_0^{30} u(t) dt = C_0(1 - e^{-30t/V})$ é a quantidade (em mg) de ureia removida nos primeiros 30 minutos de diálise.

P4.

(a) $\int_0^1 v(t) dt = \int_0^1 5\pi \sin(2\pi t) dt = 0$ é o deslocamento (isto é, diferença entre a posição final e inicial) entre os instantes 0 s e 1 s.

(b) $\int_0^1 |v(t)| dt = \int_0^1 |5\pi \sin(2\pi t)| dt = 10 m$ é a distância percorrida entre os instantes 0 s e 1 s.

P5. $d = 28$.

Exercícios Complementares

C1. $\int_1^8 f(x\sqrt[3]{x})\sqrt[3]{x} dx = 27.$

C2.

(a) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2 x \cos x dx = \frac{2}{3}.$

(b) $\int_0^{\pi/2} \sin x \sqrt{1 + \cos x} dx = \frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{2}{3}.$

(c) $\int_{-\pi}^{\pi} e^{\cos x} \sin x dx = 0.$

(d) $\int_0^1 \sqrt[3]{1 + 7x} dx = \frac{45}{28}.$

(e) $\int_5^8 x\sqrt{x-4} dx = \frac{466}{15}.$

C3. $\int_{-1}^1 \frac{x^{53} \cos^{22} x}{1 + 2x^2 + x^8} dx = 0$, pois $\frac{x^{53} \cos^{22} x}{1 + 2x^2 + x^8}$ é uma função ímpar e o intervalo de integração é simétrico em relação à origem.

C4. $\int_0^3 x f(x^2) dx = 2.$