



Cálculo 1 (MTM3101 e MTM3110)

Lista 4.6 - Substituição inversa

Última atualização: 22 de junho de 2022.

Exercícios Principais

P1. Usando o método da substituição inversa, encontre uma mudança de variáveis $x = g(t)$ que elimina a raiz do integrando (não é necessário resolver a integral resultante neste momento. Mas, de todo modo, tente!)

(a) $\int \sqrt{1 - x^2} dx.$

(b) $\int \sqrt{1 + x^2} dx.$

(c) $\int \sqrt{x^2 - 1} dx.$

(d) $\int \frac{1}{\sqrt{4 + x^2}} dx.$

(e) $\int \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} dx.$

(f) $\int \sqrt{2 - 4x^2} dx.$

(g) $\int \sqrt{9 - (x - 1)^2} dx.$

(h) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2x + 5}} dx.$

(i) $\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{36 - x^2}} dx.$

(j) $\int_0^{2/3} \sqrt{4 - 9x^2} dx.$

(k) $\int_0^a x^2 \sqrt{a^2 - x^2} dx.$



Cálculo 1 (MTM3101 e MTM3110)

Gabarito da Lista 4.6

Substituição inversa

Última atualização: 22 de junho de 2022.

Exercícios Principais

P1.

- (a) Escolhendo $x = \sin t$ para $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, temos $dx = \cos t dt$, e

$$\int \sqrt{1-x^2} dx = \int \cos^2 t dt,$$

notando que para $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ temos $\cos t \geq 0$.

Podemos escolher também $x = \cos t$ para $t \in [0, \pi]$. Nesse caso, $dx = -\sin t dt$ e

$$\int \sqrt{1-x^2} dx = - \int \sin^2 t dt,$$

notando que para $t \in [0, \pi]$ temos $\sin t \geq 0$.

Observação: veja que, escolhendo substituições diferentes, chegamos em integrais indefinidas diferentes. Como você explica essa situação?

- (b) Escolhendo $x = \tan t$ para $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, temos $dx = \sec^2 t dt$ e

$$\int \sqrt{1+x^2} dx = \int \sec^3 t dt,$$

notando que para $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ temos $\sec t \geq 0$.

Podemos também escolher $x = \cot t$ para $t \in (0, \pi)$. Nesse caso $dx = -\operatorname{cosec}^2 t dt$ e

$$\int \sqrt{1+x^2} dx = \int -\operatorname{cosec}^3 t dt,$$

notando que para $t \in (0, \pi)$ temos $\operatorname{cosec} t \geq 0$.

- (c) Escolhendo $x = \sec t$ para $t \in [0, \frac{\pi}{2}) \cup [\pi, \frac{3\pi}{2})$, temos $dx = \sec t \tan t dt$ e

$$\int \sqrt{x^2-1} dx = \int \sec t \tan^2 t dt,$$

notando que para $t \in [0, \frac{\pi}{2}) \cup [\pi, \frac{3\pi}{2})$ temos $\tan t \geq 0$.

Podemos escolher também $x = \operatorname{cosec} t$ para $t \in (0, \pi] \cup (\pi, \frac{2\pi}{2}]$. Nesse caso, temos $dx = -\operatorname{cosec} t \cot t dt$ e

$$\int \sqrt{x^2-1} dt = - \int \operatorname{cosec} t \cot^2 t dt,$$

notando que $t \in (0, \pi] \cup (\pi, \frac{2\pi}{2}]$ temos $\cot t \geq 0$.

(d) Escolhendo $x = 2\operatorname{tg}t$ para $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, temos $dx = 2\sec^2 t dt$ e

$$\int \frac{1}{\sqrt{4+x^2}} dx = \int \sec t dt = \ln |\sec t + \operatorname{tg} t| + C,$$

notando que para $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ temos $\sec t > 0$. Veja que $\operatorname{tg} t = \frac{x}{2}$ e $\sec t = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 t} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{4+x^2}$. Assim

$$\int \frac{1}{\sqrt{4+x^2}} dx = \ln |x + \sqrt{4+x^2}| + C.$$

(Poderíamos escolher também $x = 2\cotgt$ para $t \in (0, \pi)$. Faça as contas nesse caso.)

(e) $x = \operatorname{sen} t$ para $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \operatorname{sen} t dt = -\cos t + C = \sqrt{1-x^2} + C.$$

(Podemos escolher também $x = \cos t$ para $t \in (0, \pi)$.)

Observação: note que esse item é um pouco diferente do item (a), pois os extremos dos intervalos (em ambas as mudanças) precisam ser retirados, uma vez que x deve ser diferente de 1 e -1 , para que o denominador não seja zero.

(f) $x = \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sen} t$ para $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

$$\int \sqrt{2-4x^2} dx = \int \cos^2 t dt.$$

(ou $x = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos t$ para $t \in [0, \pi]$.)

(g) $x = 1 + 3\operatorname{sen} t$ para $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

$$\int \sqrt{9-(x-1)^2} dx = 9 \int \cos^2 t dt.$$

(ou $x = 1 + 3\cos t$ para $t \in [0, \pi]$.)

(h) Notando que

$$x^2 + 2x + 5 = x^2 + 2x + 1 + 4 = (x+1)^2 + 4,$$

a integral fica

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2x + 5}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{(x+1)^2 + 4}} dx$$

Assim, duas possíveis mudanças são $x = 2\operatorname{tg}t - 1$ para $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ou $x = 2\cotgt - 1$ para $t \in (0, \pi)$. Na primeira, temos

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2x + 5}} dx = \int \sec t dt = \ln |\sec t + \operatorname{tg} t| + C = \ln |x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x + 5}| + C.$$

(i) Por se tratar de uma integral definida, precisamos nos atentar aos limites de integração. Fazendo $x = 6\operatorname{sen} t$, com $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, eliminamos a raiz do integrando (lembrando que excluimos os extremos do intervalo para evitar divisão por zero). Mas veja que, com essa mudança, temos

$$0 \leq x \leq 3 \Leftrightarrow 0 \leq 6\operatorname{sen} t \leq 3 \Leftrightarrow 0 \leq \operatorname{sen} t \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow 0 \leq t \leq \frac{\pi}{6}.$$

Assim, a mudança a ser feita é $x = 6\operatorname{sen} t$ para $t \in [0, \frac{\pi}{6}]$, e temos

$$\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{36-x^2}} dx = \int_0^{\pi/6} 1 dt = \frac{\pi}{6}.$$

Outra mudança possível é $x = 6\cos t$ para $t \in [\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]$.

(j) $x = \frac{2}{3}\sin t$ para $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

$$\int_0^{2/3} \sqrt{4 - 9x^2} dx = \frac{4}{3} \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt.$$

(ou $x = \frac{2}{3} \cos t$ para $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.)

(k) $x = a \sin t$ para $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

$$\int_0^a x^2 \sqrt{a^2 - x^2} dx = a^4 \int_0^{\pi/2} \cos^4 t dt.$$

(ou $x = a \cos t$ para $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.)