Cálculo 1 (MTM3101 e MTM3110)

Lista 4.7 - Integração por partes em integrais indefinidas

Última atualização: 22 de junho de 2022.

Exercícios Principais

P1. A fórmula de integração por partes normalmente aparece nas tabelas de integrais em uma dessas duas formas:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du \quad \text{ou} \quad \int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)\,dx.$$

Vejamos como aplicar a fórmula à integral $\displaystyle\int (2x-1)\operatorname{sen} x\,dx$.

(a) Escolhendo $u = 2x-1$, qual deve ser a escolha para dv?

(b) Para as escolhas do item acima, escreva u, du, v e dv.

(c) Substitua os valores do item acima na fórmula de integração por partes.

(d) Resolva a integral do enunciado.

(e) Escolhendo $u = \operatorname{sen} x$, qual deve ser a escolha para dv? Calcule du e v e substitua na fórmula de integração por partes.

(f) A fórmula do item acima não parece ser muito útil. Isso significa que está errada?

P2. Calcule as integrais indefinidas abaixo.

(a) $\displaystyle\int \sqrt{x}\ln x\,dx$.

(b) $\displaystyle\int xe^{2x}\,dx$.

(c) $\displaystyle\int x\sec^2(2x)\,dx$.

(d) $\displaystyle\int \arccos x\,dx$.

(e) $\displaystyle\int (x^3-x^2+x-1)\ln x\,dx$.

(f) $\displaystyle\int x\cosh(4x)\,dx$.

(g) $\displaystyle\int \frac{x}{e^x}\,dx$.

(h) $\displaystyle\int (x^2+x)\cos x\,dx$.

(i) $\displaystyle\int \operatorname{arctg}(1/x)\,dx$.

(j) $\displaystyle\int e^x\operatorname{sen} x\,dx$.

(k) $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{4+x^2}}\,dx$.

(l) $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{e^x}\,dx$.

P3. Para calcular a integral $\displaystyle\int x^3(1-x^2)^{3/2}\,dx$, aplica-se o método da integração por partes com $u = x^2$ e $dv = x(1-x^2)^{3/2}\,dx$, obtendo

$$\int x^3(1-x^2)^{3/2}\,dx = \int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

Resolva a integral $\displaystyle\int v\,du$ acima.

Exercícios Complementares

C1. Calcule as integrais indefinidas abaixo.

(a) $\displaystyle\int \left(\frac{1}{2x} - 2x \operatorname{sen} x + \cos x\right) dx.$

(b) $\displaystyle\int \frac{x}{10^x}\, dx.$

(c) $\displaystyle\int x \operatorname{sen} x \cos x\, dx.$

(d) $\displaystyle\int x^3 e^x\, dx.$

(e) $\displaystyle\int e^{-3x} \cos(4x)\, dx.$

(f) $\displaystyle\int \frac{xe^{2x}}{(1+2x)^2}\, dx.$

(g) $\displaystyle\int e^{\sqrt{x}}\, dx.$

(h) $\displaystyle\int x \ln(x+1)\, dx.$

(i) $\displaystyle\int x^3 e^{x^2}\, dx.$

C2. Explique que procedimento usar para calcular a integral $\displaystyle\int x^{30} \operatorname{sen} x\, dx$ (não precisa calcular, apenas aponte o caminho).

Universidade Federal de Santa Catarina
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas
Departamento de Matemática

Cálculo 1 (MTM3101 e MTM3110)

Gabarito da Lista 4.7

Integração por partes em integrais indefinidas

Última atualização: 22 de junho de 2022.

Exercícios Principais

P1.

(a) $dv = \operatorname{sen} x\, dx$.

(b) $u = 2x - 1, \quad du = 2dx, \quad v = -\cos x \quad \text{e} \quad dv = \operatorname{sen} x\, dx$.

(c) $\displaystyle\int (2x-1)\operatorname{sen} x\, dx = (2x-1)(-\cos x) - \int (-\cos x)(2dx)$.

(d) $\displaystyle\int (2x-1)\operatorname{sen} x\, dx = (2x-1)(-\cos x) - \int (-\cos x)(2dx) = -(2x-1)\cos x + 2\int \cos x\, dx = (1-2x)\cos x + 2\operatorname{sen} x + C$.

(e) $dv = (2x-1)\, dx, \quad du = \cos x\, dx, \quad v = x^2 - x,$

$$\int (2x-1)\operatorname{sen} x\, dx = (\operatorname{sen} x)(x^2 - x) - \int (x^2 - x)(\cos x\, dx).$$

(f) A fórmula não está errada, nem a igualdade obtida no item acima. O que aconteceu é que nossas escolhas de u e dv não levaram a uma integral mais fácil de resolver do que a integral inicial. De alguma forma, isso indica que as escolhas de u e dv não ajudaram.

P2.

(a) $\displaystyle\int \sqrt{x}\ln x\, dx = \frac{2x^{3/2}(3\ln x - 2)}{9} + C$.

(b) $\displaystyle\int xe^{2x}\, dx = \frac{(2x-1)e^{2x}}{4} + C$.

(c) $\displaystyle\int x\sec^2(2x)\, dx = \frac{x\operatorname{tg}(2x)}{2} + \frac{\ln|\cos(2x)|}{4} + C$.

(d) $\displaystyle\int \arccos x\, dx = x\arccos x - \sqrt{1-x^2} + C$.

(e) $\displaystyle\int (x^3 - x^2 + x - 1)\ln x\, dx = \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - x\right)\ln x - \frac{x^4}{16} + \frac{x^3}{9} - \frac{x^2}{4} + x + C$.

(f) $\displaystyle\int x\cosh(4x)\, dx = \frac{x\operatorname{senh}(4x)}{4} - \frac{\cosh(4x)}{16} + C$.

(g) $\displaystyle\int \frac{x}{e^x}\, dx = -(x+1)e^{-x} + C$.

(h) $\displaystyle\int (x^2+x)\cos x\,dx = (x^2+x-2)\operatorname{sen} x + (2x+1)\cos x + C.$

(i) $\displaystyle\int \operatorname{arctg}(1/x)\,dx = x\operatorname{arctg}(1/x) + \frac{\ln(x^2+1)}{2} + C.$

(j) $\displaystyle\int e^x \operatorname{sen} x\,dx = \frac{(\operatorname{sen} x - \cos x)e^x}{2} + C.$

(k) $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{4+x^2}}\,dx = \frac{(x^2-8)\sqrt{4+x^2}}{3} + C.$

(l) $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{e^x}\,dx = -(x^2+2x+3)e^{-x} + C.$

P3. $\displaystyle\int v\,du = \int \left[-\frac{(1-x^2)^{5/2}}{5}\right] 2x\,dx = \frac{2(1-x^2)^{7/2}}{35} + C.$

Exercícios Complementares

C1.

(a) $\displaystyle\int \left(\frac{1}{2x} - 2x\operatorname{sen} x + \cos x\right) dx = \frac{\ln|x|}{2} - \operatorname{sen} x + 2x\cos x + C.$

(b) $\displaystyle\int \frac{x}{10^x}\,dx = -\left(\frac{x}{\ln 10} + \frac{1}{(\ln 10)^2}\right)10^{-x} + C.$

(c) $\displaystyle\int x\operatorname{sen} x\cos x\,dx = \frac{\operatorname{sen}(2x)}{8} - \frac{x\cos(2x)}{4} + C.$

(d) $\displaystyle\int x^3 e^x\,dx = (x^3 - 3x^2 + 6x - 6)e^x + C.$

(e) $\displaystyle\int e^{-3x}\cos(4x)\,dx = \frac{(4\operatorname{sen}(4x) - 3\cos(4x))e^{-3x}}{25} + C.$

(f) $\displaystyle\int \frac{xe^{2x}}{(1+2x)^2}\,dx = \frac{e^{2x}}{8x+4} + C.$

(g) $\displaystyle\int e^{\sqrt{x}}\,dx = 2(\sqrt{x}-1)e^{\sqrt{x}} + C.$

(h) $\displaystyle\int x\ln(x+1)\,dx = \frac{(x^2-1)\ln(x+1)}{2} - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} + C.$

(i) $\displaystyle\int x^3 e^{x^2}\,dx = \frac{(x^2-1)e^{x^2}}{2} + C.$

C2. Aplicamos uma integração por partes com $u = x^{30}$ e a nova integral a ser resolvida é da forma $\displaystyle\int x^{29}\cos x\,dx$. Aplicando novamente integração por partes, a nova integral a ser resolvida é da forma $\displaystyle\int x^{28}\operatorname{sen} x\,dx$. Fazendo esse procedimento 30 vezes, a última integral não tem mais potência de x e pode ser resolvida diretamente. Daria um trabalho gigantesco, mas pelo menos sabemos que existe um caminho para resolver (a vantagem de saber um caminho, mesmo que longo, é que podemos implementar computacionalmente).