Universidade Federal de Santa Catarina
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas
Departamento de Matemática

Cálculo 1 (MTM3101 e MTM3110)

Lista 4.8 - Integração por partes em integrais definidas

Última atualização: 22 de junho de 2022.

Exercícios Principais

P1. Calcule as integrais definidas abaixo.

(a) $\displaystyle\int_{-1}^{1} xe^{2x}\,dx.$

(b) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{1}{2}} \arccos x\,dx.$

(c) $\displaystyle\int_{1}^{5} \frac{x}{e^x}\,dx.$

(d) $\displaystyle\int_{1}^{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}(1/x)\,dx.$

(e) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{x^3}{\sqrt{4+x^2}}\,dx.$

(f) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{x^2+1}{e^x}\,dx.$

(g) $\displaystyle\int_{15\pi}^{18\pi} x\cos\left(\frac{x}{3}\right)dx$

P2. Seja $s > 0$ um número real fixado. Calcule $\displaystyle\lim_{M\to\infty}\int_{0}^{M} te^{-st}dt.$

P3. Sejam a, b e c números inteiros. Sabendo que

$$\int_0^1 (ax+b)e^{cx}\,dx = \frac{3+e^2}{2},$$

determine a, b e c.

P4. Determine $b \in \mathbb{R}$ de modo que

$$\int_{e^{-3}}^{1} \ln^2 x\,dx = 2 - be^{-3}.$$

P5. Determine $b > 0$ de modo que

$$\int_{\frac{7\pi}{2b}}^{\frac{9\pi}{2b}} x\operatorname{sen}(bx)\,dx = \frac{2}{81}.$$

Exercícios Complementares

C1. Calcule as integrais definidas abaixo.

(a) $\displaystyle\int_{0}^{\pi} x\operatorname{sen} x\cos x\,dx.$

(b) $\displaystyle\int_{0}^{1} x^3e^x\,dx.$

(c) $\displaystyle\int_0^2 \frac{xe^{2x}}{(1+2x)^2}\,dx.$

(d) $\displaystyle\int_0^1 e^{\sqrt{x}}\,dx.$

(e) $\displaystyle\int_{-1}^1 x^3 e^{x^2}\,dx.$

C2. Determine $b \in \mathbb{R}$ de modo que

$$\int_{-2}^{b} 4xe^{4x}\,dx = \frac{9}{4e^8} + \frac{23e^{4b}}{4}.$$

C3. Calcule a área da região limitada pelas curvas $y = x\sqrt{4-x^2}$ e $y = 0$ e que fica no semiplano $x \geqslant 0$.

Universidade Federal de Santa Catarina
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas
Departamento de Matemática

Cálculo 1 (MTM3101 e MTM3110)

Gabarito da Lista 4.8

Integração por partes em integrais definidas

Última atualização: 22 de junho de 2022.

Exercícios Principais

P1.

(a) $\displaystyle\int_{-1}^{1} xe^{2x}\,dx = \frac{e^2+3e^{-2}}{4}$.

(b) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{1}{2}} \arccos x\,dx = 1-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{6}$.

(c) $\displaystyle\int_{1}^{5} \frac{x}{e^x}\,dx = \frac{2}{e}-\frac{6}{e^5}$.

(d) $\displaystyle\int_{1}^{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}(1/x)\,dx = \frac{(2\sqrt{3}-3)\pi}{12}+\frac{\ln 2}{2}$.

(e) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{x^3}{\sqrt{4+x^2}}\,dx = \frac{16-7\sqrt{5}}{3}$.

(f) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{x^2+1}{e^x}\,dx = 3-\frac{6}{e}$.

(g) $\displaystyle\int_{15\pi}^{18\pi} x\cos\left(\frac{x}{3}\right)dx = 18$

P2. Primeiro vamos calcular a integral:

$$\int_0^M te^{-st}dt = -\frac{(st+1)e^{-st}}{s^2}\bigg|_0^M = \frac{1}{s^2}-\frac{(sM+1)e^{-sM}}{s^2}.$$

Como o limite de $(sM+1)e^{-sM}$ com $M\to\infty$ gera uma indeterminação ao substituir (aqui usamos que $s>0$), então precisamos procurar métodos alternativos. Reescrevendo e aplicando a Regra de L'Hospital, obtemos

$$\lim_{M\to\infty}(sM+1)e^{-sM} = \lim_{M\to\infty}\frac{sM+1}{e^{sM}} = \lim_{M\to\infty}\frac{s}{se^{sM}} = 0.$$

Com isso, $\displaystyle\lim_{M\to\infty}\int_0^M te^{-st}dt = \lim_{M\to\infty}\left(\frac{1}{s^2}-\frac{(sM+1)e^{-sM}}{s^2}\right) = \frac{1}{s^2}$.

P3. $a=4$, $b=-1$ e $c=2$.

P4. $b=17$.

P5. $b = 9$.

Exercícios Complementares

C1.

(a) $\displaystyle\int_0^{\pi} x \operatorname{sen} x \cos x \, dx = -\frac{\pi}{4}$.

(b) $\displaystyle\int_0^{1} x^3 e^x \, dx = 6 - 2e$.

(c) $\displaystyle\int_0^{2} \frac{xe^{2x}}{(1+2x)^2} \, dx = \frac{e^4}{20} - \frac{1}{4}$.

(d) $\displaystyle\int_0^{1} e^{\sqrt{x}} \, dx = 2$.

(e) $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^3 e^{x^2} \, dx = 0$.

C2. $b = 6$.

C3. $\dfrac{8}{3}$.