Universidade Federal de Santa Catarina
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas
Departamento de Matemática

Cálculo 1 (MTM3101 e MTM3110)

Lista 4.10 - Substituição inversa (continuação)

Última atualização: 22 de junho de 2022.

Exercícios Principais

P1. Resolva as integrais abaixo.

(a) $\displaystyle\int \sqrt{1-x^2}\,dx.$ **(b)** $\displaystyle\int \sqrt{1+x^2}\,dx.$ **(c)** $\displaystyle\int \sqrt{x^2-1}\,dx.$

(d) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{4+x^2}}\,dx.$ **(e)** $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$ **(f)** $\displaystyle\int \sqrt{2-4x^2}\,dx.$

(g) $\displaystyle\int \sqrt{9-(x-1)^2}\,dx.$ **(h)** $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+5}}\,dx.$ **(i)** $\displaystyle\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{36-x^2}}\,dx.$

(j) $\displaystyle\int_0^{2/3} \sqrt{4-9x^2}\,dx.$ **(k)** $\displaystyle\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx.$

P2. Alda e Fernando usaram métodos diferentes para resolver a integral $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\,dx.$

Alda. Fazendo a substituição $x = a\operatorname{tg} t$, tem-se $dx = a\operatorname{sen}^2 t\,dt$ e $\sqrt{x^2+a^2} = a\sec t$. Assim,

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\,dx &= \int \sec t\,dt = \ln|\operatorname{tg} t + \sec t| + C\\ &= \ln\left|\frac{x}{a} + \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a}\right| + C = \ln(x+\sqrt{x^2+a^2}) + C.\end{aligned}$$

No último passo, Alda usou que o logaritmo da divisão é a diferença dos logaritmos e absorveu a constante $\ln|a|$ em C. Também usou que $x+\sqrt{x^2+a^2}$ é sempre maior ou igual a 0 para retirar o módulo.

Fernando. Fazendo substituição $x = a\operatorname{senh} t$, tem-se $dx = a\cosh t\,dt$ e $\sqrt{x^2+a^2} = a\cosh t$. Assim,

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\,dx = \int 1\,dt = t + C = \operatorname{arcsenh}\left(\frac{x}{a}\right) + C,$$

em que arcsenh representa a função inversa do seno hiperbólico.

Verifique que ambas as resoluções estão corretas e relacione as duas respostas.

Universidade Federal de Santa Catarina
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas
Departamento de Matemática

Cálculo 1 (MTM3101 e MTM3110)

Gabarito da Lista 4.10

Substituição inversa (continuação)

Última atualização: 22 de junho de 2022.

Exercícios Principais

P1.

(a) $\displaystyle\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{\operatorname{arcsen} x + x\sqrt{1-x^2}}{2} + C.$

(b) $\displaystyle\int \sqrt{1+x^2}\,dx = \frac{x\sqrt{1+x^2} + \ln(x+\sqrt{1+x^2})}{2} + C.$

(c) $\displaystyle\int \sqrt{x^2-1}\,dx = \frac{x\sqrt{x^2-1} - \ln|x+\sqrt{x^2-1}|}{2} + C.$

(d) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{4+x^2}}\,dx = \ln(x+\sqrt{4+x^2}) + C.$

(e) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\sqrt{1-x^2} + C.$

(f) $\displaystyle\int \sqrt{2-4x^2}\,dx = \frac{\operatorname{arcsen}(\sqrt{2}x) + x\sqrt{2-4x^2}}{2} + C.$

(g) $\displaystyle\int \sqrt{9-(x-1)^2}\,dx = \frac{9}{2}\operatorname{arcsen}\left(\frac{x-1}{3}\right) + \frac{(x-1)\sqrt{-x^2+2x+8}}{2} + C.$

(h) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+5}}\,dx = \ln(x+1+\sqrt{(x+1)^2+4}) + C.$

(i) $\displaystyle\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{36-x^2}}\,dx = \frac{\pi}{6}.$

(j) $\displaystyle\int_0^{2/3} \sqrt{4-9x^2}\,dx = \frac{\pi}{3}.$

(k) $\displaystyle\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{\pi a^4}{16}.$

P2. Sabemos que $\operatorname{senh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$. Assim, encontrar a função inversa de $\operatorname{senh} x$ é o mesmo que encontrar a função inversa de $\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$. Para isso, devemos escrever $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ e isolar x. Fazendo uma mudança de variável intermediária $z = e^x$, obtemos $y = \dfrac{z - z^{-1}}{2}$. Assim,

$$2y = z - \frac{1}{z} \;\Rightarrow\; 2yz = z^2 - 1 \;\Rightarrow\; z^2 - 2yz - 1 = 0 \;\Rightarrow\; z = \frac{2y \pm \sqrt{4y^2+4}}{2} \;\Rightarrow\; z = y \pm \sqrt{y^2+1}.$$

Como $z = e^x > 0$ e $\sqrt{y^2+1} > y$, então apenas a solução $z = y + \sqrt{y^2+1}$ faz sentido. Voltando para a letra x, temos $e^x = y + \sqrt{y^2+1}$ e, portanto, $x = \ln(y + \sqrt{y^2+1})$. Com isso, a função inversa de $\operatorname{senh} x$ é $\ln(x + \sqrt{x^2+1})$. De posse dessa informação, concluímos que a resposta da integral obtida por Fernando é

$$\operatorname{arcsenh}\left(\frac{x}{a}\right) + C = \ln(x/a + \sqrt{(x/a)^2+1}) + C = \ln(x + \sqrt{x^2+a^2}) - \ln|a| + C = \ln(x + \sqrt{x^2+a^2}) + C.$$

Na última etapa, absorvemos $\ln|a|$ na constante. E isso mostra que Alda e Fernando, de fato, obtiveram a mesma resposta.