Universidade Federal de Santa Catarina
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas
Departamento de Matemática

Cálculo 1 (MTM3101 e MTM3110)

Lista 4.11 - Decomposição em frações parciais

Última atualização: 22 de junho de 2022.

Exercícios Principais

P1. Calcule as integrais abaixo.

(a) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2-5x+6}\,dx.$ **(b)** $\displaystyle\int \frac{x+1}{x(x-2)(x+3)}\,dx.$ **(c)** $\displaystyle\int \frac{2}{(x+1)(x-1)^2}\,dx.$

(d) $\displaystyle\int \frac{x+5}{x^3-4x^2+4x}\,dx.$ **(e)** $\displaystyle\int \frac{4x+1}{x^2+6x+12}\,dx.$ **(f)** $\displaystyle\int \frac{x^4+2x^2-8x+4}{x^3-8}\,dx.$

(g) $\displaystyle\int \frac{x^2+2x+3}{x^2+4x+13}\,dx.$ **(h)** $\displaystyle\int \frac{x^2+3x+1}{x^2-2x-3}\,dx.$ **(i)** $\displaystyle\int_0^1 \frac{2}{2x^2+3x+1}\,dx.$

P2. Use a substituição $u=\sqrt[6]{x}$ para calcular a integral $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}\,dx.$

P3. Determine $b \in \mathbb{R}$ de modo que

$$\int_{-1}^{b} \frac{dx}{x^2+2x+26} = -\frac{\pi}{20}.$$

P4. O matemático alemão Karl Weierstrass (1815-1897) observou que a substituição $t=\operatorname{tg}(x/2)$ converte qualquer função racional de $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$ em uma função racional de t.

(a) Assuma que $-\pi < x < \pi$ e mostre que se $t=\operatorname{tg}(x/2)$, então

$$\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \quad \text{e} \quad \cos\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}.$$

(b) Nas condições do item anterior, mostre que

$$\operatorname{sen} x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad \text{e} \quad dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt.$$

(c) Utilize a substituição $t=\operatorname{tg}(x/2)$ para calcular a integral $\displaystyle\int \frac{1}{3\operatorname{sen} x - 4\cos x}\,dx.$

Universidade Federal de Santa Catarina
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas
Departamento de Matemática

Cálculo 1 (MTM3101 e MTM3110)

Gabarito da Lista 4.11

Decomposição em frações parciais

Última atualização: 22 de junho de 2022.

Exercícios Principais

P1.

(a) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2-5x+6}\,dx = 3\ln|x-3| - 2\ln|x-2| + C.$

(b) $\displaystyle\int \frac{x+1}{x(x-2)(x+3)}\,dx = \frac{3}{10}\ln|x-2| - \frac{2}{15}\ln|x+3| - \frac{1}{6}\ln|x| + C.$

(c) $\displaystyle\int \frac{2}{(x+1)(x-1)^2}\,dx = \frac{1}{2}\ln|x+1| - \frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + C.$

(d) $\displaystyle\int \frac{x+5}{x^3-4x^2+4x}\,dx = \frac{5}{4}\ln|x| - \frac{5}{4}\ln|x-2| - \frac{7}{2(x-2)} + C.$

(e) $\displaystyle\int \frac{4x+1}{x^2+6x+12}\,dx = 2\ln(x^2+6x+12) - \frac{11\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{x+3}{\sqrt{3}}\right) + C.$

(f) $\displaystyle\int \frac{x^4+2x^2-8x+4}{x^3-8}\,dx = \frac{x^2}{2} + \ln|x-2| + \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+4) - \frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right) + C.$

(g) $\displaystyle\int \frac{x^2+2x+3}{x^2+4x+13}\,dx = x - \ln(x^2+4x+13) - 2\operatorname{arctg}\left(\frac{x+2}{3}\right) + C.$

(h) $\displaystyle\int \frac{x^2+3x+1}{x^2-2x-3}\,dx = x + \frac{19}{4}\ln|x-3| + \frac{1}{4}\ln|x+1| + C.$

(i) $\displaystyle\int_0^1 \frac{2}{2x^2+3x+1}\,dx = 2\ln 3 - 2\ln 2.$

P2. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}\,dx = 2\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} + 6\ln|\sqrt[6]{x}-1| + C.$

P3. $b = -6.$

P4.

(a) Usando que $\sec^2 y = 1 + \operatorname{tg}^2 y$, concluímos que $\sec^2(x/2) = 1 + t^2$. Como a secante tem o mesmo sinal do cosseno e $-\pi/2 < x/2 < \pi/2$, então $\sec(x/2) = \sqrt{1+t^2}$. Assim, $\cos(x/2) = \dfrac{1}{\sec(x/2)} = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$. Usando a relação $\operatorname{sen}^2 y + \cos^2 y = 1$, concluímos que $\operatorname{sen}^2(x/2) = \dfrac{t^2}{1+t^2}$. Como o seno tem o mesmo sinal da tangente se o argumento está entre $-\pi/2$ e $\pi/2$ e $\operatorname{tg}(x/2) = t$, então $\operatorname{sen}(x/2) = \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}$.

(b)

$$\operatorname{sen} x = 2\operatorname{sen}(x/2)\cos(x/2) = \frac{2t}{1+t^2},$$
$$\cos x = \cos^2(x/2) - \operatorname{sen}^2(x/2) = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$
$$t = \operatorname{tg}(x/2) \quad \Rightarrow \quad x = 2\operatorname{arctg} t \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt.$$

(c) $\displaystyle\int \frac{1}{3\operatorname{sen} x - 4\cos x}\,dx = \frac{\ln|2\operatorname{tg}(x/2)-1|}{5} - \frac{\ln|\operatorname{tg}(x/2)+2|}{5} + C.$