Universidade Federal de Santa Catarina
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas
Departamento de Matemática

UFSC

MTM

Cálculo 1 (MTM3101 e MTM3110)

Lista 4.13 - Integrais impróprias em intervalos ilimitados

Última atualização: 22 de junho de 2022.

Exercícios Principais

P1. Determine se cada integral é convergente ou divergente. Calcule aquelas que são convergentes.

(a) $\displaystyle\int_3^{\infty} \frac{1}{(x-2)^{3/2}}\,dx.$ **(b)** $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{1+x}}\,dx.$ **(c)** $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{3-4x}\,dx.$

(d) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{(2x+1)^3}\,dx.$ **(e)** $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} 2^x\,dx.$ **(f)** $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^2}{\sqrt{1+x^3}}\,dx.$

(g) $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{1}{x(\ln x)^2}\,dx.$ **(h)** $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x}{(x^2+1)^2}\,dx.$

P2. Em cada item, determine a área da região R.

(a) $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant y \leqslant e^{-x} \text{ e } x \geqslant 1\}.$

(b) $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant y \leqslant \frac{1}{x^3+x} \text{ e } x \geqslant 1\}.$

P3. Em cada item, determine $a \in \mathbb{R}$ para o qual a integral converge e determine o resultado da integral para esse valor de a.

(a) $\displaystyle\int_0^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+4}} - \frac{a}{x+2}\right) dx.$ **(b)** $\displaystyle\int_0^{\infty} \left(\frac{x}{x^2+1} - \frac{a}{3x+1}\right) dx.$

P4. A velocidade média das moléculas em um gás ideal é dada por

$$v_m = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{M}{2RT}\right)^{3/2} \int_0^{\infty} v^3 e^{-\frac{Mv^2}{2RT}}\,dv,$$

em que M é o peso da molécula do gás, R é a constante dos gases, T é a temperatura do gás e v é a velocidade molecular. Mostre que

$$v_m = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}.$$

Cálculo 1 (MTM3101 e MTM3110)

Gabarito da Lista 4.13

Integrais impróprias em intervalos ilimitados

Última atualização: 22 de junho de 2022.

Exercícios Principais

P1.

(a) 2.
(b) Divergente.
(c) Divergente.
(d) $\frac{1}{36}$.
(e) $\frac{1}{\ln 2}$.
(f) Divergente.
(g) $\frac{1}{\ln 2}$.
(h) 0.

P2.

(a) $\frac{1}{e}$.
(b) $\frac{\ln 2}{2}$.

P3.

(a) $a = 1$ e o resultado da integral é $\ln 2$.
(b) $a = 3$ e o resultado da integral é $-\ln 3$.

P4. Denote $a = \frac{M}{2RT}$ para facilitar a escrita da integral. O resultado da integral indefinida é

$$\int v^3 e^{-av^2}\,dv = -\frac{(av^2+1)e^{-av^2}}{2a^2}.$$

Como a é positivo, então

$$\lim_{v\to\infty} \frac{(av^2+1)e^{-av^2}}{2a^2} = 0.$$

Assim,

$$\int_0^\infty v^3 e^{-av^2}\,dv = \frac{1}{2a^2} = \frac{4R^2T^2}{2M^2} = \frac{2R^2T^2}{M^2}.$$

Juntando com a constante à frente da integral, obtemos

$$v_m = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{M}{2RT}\right)^{3/2} \int_0^\infty v^3 e^{-\frac{Mv^2}{2RT}}\,dv = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{M}{2RT}\right)^{3/2} \frac{2R^2T^2}{M^2} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}.$$