Universidade Federal de Santa Catarina
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas
Departamento de Matemática

Cálculo 1 (MTM3101 e MTM3110)

Lista 4.14 - Testes de convergência de integrais impróprias

Última atualização: 23 de junho de 2022.

Exercícios Principais

P1. Determine se cada integral é convergente ou divergente. Não precisa calcular, apenas decidir se é convergente ou não.

(a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x}{x^3+1}\,dx.$

(b) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1+\operatorname{sen}^2 x}{\sqrt{x}}\,dx.$

(c) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{x+1}{\sqrt{x^4-x}}\,dx.$

(d) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{x^2+e^x}\,dx.$

(e) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\,dx.$

(f) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2-1}{x^4+1}\,dx.$

(g) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2}\,dx.$

P2. Seja $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ uma função contínua e limitada. A *Transformada de Laplace* de f é a função $F : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ definida por

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt.$$

(a) Mostre que a integral acima converge para qualquer f nas condições do enunciado e qualquer $s > 0$.

(b) Encontre a transformada de Laplace de $f(t) = 1$.

(c) Encontre a transformada de Laplace de $f(t) = t$. *Sugestão.* Veja o exercício **P2** da lista de exercícios 4.8.

(d) Encontre a transformada de Laplace de $f(t) = \operatorname{sen}(at)$.

(e) Suponha que f' seja contínua e limitada e denote as transformadas de Laplace de f e f' por F e G, respectivamente. Mostre que $G(s) = sF(s) - f(0)$.

Universidade Federal de Santa Catarina
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas
Departamento de Matemática

Cálculo 1 (MTM3101 e MTM3110)

Gabarito da Lista 4.14

Testes de convergência de integrais impróprias

Última atualização: 22 de junho de 2022.

Exercícios Principais

P1.

(a) Convergente.
(b) Divergente.
(c) Divergente.
(d) Convergente.
(e) Convergente.
(f) Convergente.
(g) Convergente.

P2.

(a) Como f é limitada, existe $M > 0$ tal que $|f(t)| \leq M$, para todo t. Assim, pelo teste da comparação, $\displaystyle\int_0^\infty e^{-st}|f(t)|\,dt$ converge, pois $e^{-st}|f(t)| \leq M$ para $t \geq 0$ e $s > 0$ e $\displaystyle\int_0^\infty Me^{-st}\,dt = \frac{M}{s}$ converge. Agora, usando o fato de que a integral $\displaystyle\int_0^\infty e^{-st}|f(t)|\,dt = \int_0^\infty |e^{-st}f(t)|\,dt$ converge, concluímos que $\displaystyle\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt$ também converge.

(b) $F(s) = \dfrac{1}{s}$.

(c) $F(s) = \dfrac{1}{s^2}$.

(d) $F(s) = \dfrac{a}{a^2 + s^2}$.

(e)

$$G(s) = \int_0^\infty \underbrace{e^{-st}}_{u}\underbrace{f'(t)\,dt}_{dv} = e^{-st}f(t)\Big|_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt = -f(0) + sF(s) = sF(s) - f(0).$$