



1 Funções

Uma função é uma regra que associa cada elemento de um dado conjunto, chamado domínio da função, a exatamente um elemento de um outro conjunto, chamado de contradomínio da função.

Vamos chamar os elementos do domínio da função de entradas e os respectivos elementos do contradomínio, associados pela função, de saídas.

Veja que as saídas são apenas alguns elementos do contradomínio, que pode ter outros elementos além das saídas da função. O subconjunto formado pelas saídas da função é chamado de imagem da função.

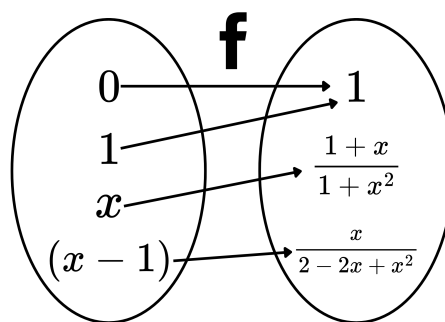


Figura 1: Exemplo de uma função

Note que para cada entrada (elemento do domínio), a regra de uma função determina exatamente uma saída (elemento do contradomínio). No entanto, entradas diferentes podem produzir a mesma saída.

Frequentemente, há situações em que uma variável está de alguma forma ligada ao valor de outra variável. Por exemplo, o nível de educação de um indivíduo está ligado à renda anual. O tamanho do motor de um veículo está ligado ao consumo de combustível. Quando o valor de uma variável está relacionado ao valor de uma segunda variável, temos uma relação. Uma relação é uma correspondência entre dois conjuntos. Se x e y

são dois elementos desses conjuntos e se existe uma relação entre x e y , então dizemos que x corresponde a y ou que y depende de x , e escrevemos $y = f(x)$.

Uma função também pode ser vista como uma máquina em que cada entrada é associada a apenas uma saída, ou seja, entradas diferentes podem ter a mesma saída, mas cada entrada tem apenas uma saída.

Por exemplo, um forno micro-ondas pode ser visto como uma função que transforma um saco de milho cru em pipoca. A associação de uma pessoa com a sua mãe também é uma função, pois cada pessoa possui uma única mãe. Já a associação com avó não é uma função, pois há a avó materna e a avó paterna, ou seja, a associação não é única.

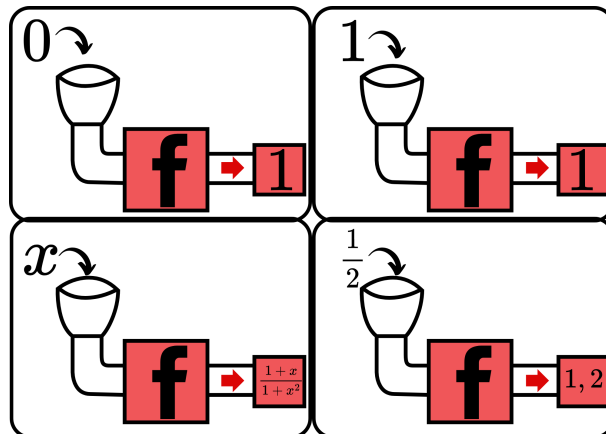


Figura 2: Exemplo de uma função vista como uma máquina.

Para nos ajudar a entender o que é uma função, usamos diagramas de máquinas e de setas. Podemos descrever uma função específica das seguintes quatro maneiras:

- verbalmente (por uma descrição em palavras);
- algebricamente (por uma fórmula explícita);
- visualmente (por um gráfico);
- numericamente (por uma tabela de valores).

Uma função não só pode ser expressa através de uma das maneiras descritas acima. Também podemos expressar uma função através de pares ordenados $(x, f(x))$ em que x é uma entrada e $f(x)$ é a saída correspondente. Desta forma, uma função pode ser vista como um conjunto de pares ordenados (x, y) tais que para cada x existe apenas um y de modo que o par (x, y) esteja neste conjunto. Esse conjunto de pares ordenados também é chamado de gráfico da função. Veremos mais sobre isso em outro material.

1.1 Exercícios

Exercício 1: Veja os exemplos resolvidos abaixo e depois calcule os valores correspondentes das entradas nas tabelas e também escreva os pares ordenados correspondentes.

a) f é a função que multiplica o número por 3 e depois subtrai 5.

x	$f(x)$
-1	$f(-1) = -1 \cdot 3 - 5 = -3 - 5 = -8$
0	$f(0) = 0 \cdot 3 - 5 = 0 - 5 = -5$
1	$f(1) = 1 \cdot 3 - 5 = 3 - 5 = -2$
3	$f(3) = 3 \cdot 3 - 5 = 9 - 5 = 4$
$\frac{x}{3} + 5$	$f\left(\frac{x}{3} + 5\right) = \left(\frac{x}{3} + 5\right) \cdot 3 - 5 = \frac{x}{3} \cdot 3 + 5 \cdot 3 - 5 = x + 10$

Resposta:

x	$f(x)$
-1	-8
0	-5
1	-2
3	4
$\frac{x}{3} + 5$	$x + 10$

Os pares ordenados correspondentes são: $(-1, -8), (0, -5), (1, -2), (3, 4), \left(\frac{x}{3} + 5, x + 10\right)$.

b) $f(x) = x^2 - \sqrt{x}$

x	$f(x)$
0	$f(0) = 0^2 - \sqrt{0} = 0 - 0 = 0$
$1/4$	$f\left(\frac{1}{4}\right) = \left(\frac{1}{4}\right)^2 - \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{16} - \frac{1}{2} = \frac{1-8}{16} = \frac{-7}{16}$
1	$f(1) = 1^2 - \sqrt{1} = 1 - 1 = 0$
2	$f(2) = 2^2 - \sqrt{2} = 4 - \sqrt{2}$
x^4	$f(x^4) = (x^4)^2 - \sqrt{x^4} = x^{4 \cdot 2} - (x^4)^{1/2} = x^8 - x^2$

Resposta:

x	$f(x)$
0	0
$1/4$	$-7/16$
1	0
2	$4 - \sqrt{2}$
x^4	$x^8 - x^2$

Os pares ordenados correspondentes são: $(0, 0), \left(\frac{1}{4}, -\frac{7}{16}\right), (1, 0), (2, 4 - \sqrt{2}), (x^4, x^8 - x^2)$.

a) f é a função que calcula o quadrado do número.

x	$f(x)$
-1	
0	
$1/2$	
1	
$\sqrt{x}$	

Pares ordenados: (,), (,), (,), (,), (,).

b) $f(x) = 2x^2 - 3$.

x	$f(x)$
-1	
0	
1/2	
1	
$2x - 3$	

Pares ordenados: (,), (,), (,), (,), (,).

c) f é a função que calcula a raiz quadrada do número e depois multiplica por 3.

x	$f(x)$
0	
1	
9/4	
3	
$3x$	

Pares ordenados: (,), (,), (,), (,), (,).

d) $f(x) = \frac{1+x}{1+x^2}$.

x	$f(x)$
-1	
0	
1/2	
1	
$x^2 + 1$	

Pares ordenados: (,), (,), (,), (,), (,).

Exercício 2: Considere a função $g(x) = \frac{x+3}{2} - 1$. Determine o número a tal que $g(a) = 5$.

Exercício 3: Considere a função $g(x) = \frac{x-1}{x+2}$. Determine o número a tal que $g(a) = 4$.

Exercício 4: O conjunto de pares ordenados (x, y) que são soluções da equação $x^2 + y = 1$ é uma função?

A pergunta aqui é se a relação $y = f(x)$ em que $x^2 + y = 1$ é uma função.

Exercício 5: O conjunto de pares ordenados (x, y) que são soluções da equação $x + y^2 = 1$ é uma função?

A pergunta aqui é se a relação $y = f(x)$ em que $x + y^2 = 1$ é uma função.

Exercício 6: A altura de um avião é uma função do tempo?

Exercício 7: Considerando o conjunto de todas as pessoas que possuem pelo menos uma irmã, a relação que associa cada uma destas pessoas a uma de suas irmãs é uma função?

Exercício 8: De acordo com a APROSOJA, o custo de produção da soja por hectare para safra 2023/2024 no Mato Grosso do Sul deve permanecer na média do estado, em R\$6.170,61 por hectare. Qual o custo de produção de soja numa área de x hectares?

Exercício 9: Uma fábrica de peças automotivas tem um custo de operação fixo de R\$8041,00 por mês e gasta R\$37,00 para produzir cada peça. Esta fábrica vende cada peça por R\$80,00. Encontre a função lucro, L , que associa a cada número natural n o lucro obtido pela fábrica quando ela produz e vende n peças. Observe que o lucro pode ser negativo, indicando que a fábrica está em prejuízo. Determine qual é o número mínimo de peças que a fábrica deve produzir (e vender) em um mês para lucrar pelo menos R\$15595,00.

Exercício 10: Encontre a expressão algébrica da função f que satisfaz a equação

$$2f(x) + f(1 - x) = x^2$$

Dica: Troque x por $1 - x$ na equação acima para obter uma nova equação e depois resolva um sistema linear com duas equações e com variáveis $f(x)$ e $f(1 - x)$.

1.2 Respostas dos exercícios

Exercício 1:

a)

x	$f(x)$
-1	1
0	0
1/2	1/4
1	1
$\sqrt{x}$	x

$(-1, 1), (0, 0), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right), (1, 1), (\sqrt{x}, x).$

b)

x	$f(x)$
-1	-1
0	-3
1/2	-5/2
1	-1
$2x - 3$	$8x^2 - 12x + 15$

c)

x	$f(x)$
0	0
1	3
9/4	9/2
3	$3\sqrt{3}$
$3x$	$3\sqrt{3x}$

d)

x	$f(x)$
-1	0
0	1
1/2	6/5
1	1
$x^2 + 1$	$\frac{2 + x^2}{2 + 2x^2 + x^4}$

2. 9

3. -3

4. Sim, $y = f(x) = 1 - x^2$.

5. Não, pois para qualquer $x < 1$, tanto $y = \sqrt{1 - x}$ quanto $y = -\sqrt{1 - x}$ são soluções, logo, dado $x < 1$, há mais de um valor y que satisfaz a equação $x + y^2 = 1$. Note que se $x > 1$, então $x + y^2 > 1 + y^2 > 1$.

6. Sim.

7. Não.

8. $f(x) = (6170, 61)x$.

9. $L(n) = 80n - 37n - 8041 = 43n - 8041$. $L(n) \geq 15595$ se $n > 549$. Note que n é um número inteiro.

10. $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 1}{3}$.

2 Domínio de uma função

Muitas vezes o domínio de uma função não é especificado; em vez disso, apenas a equação que define a função é fornecida. Nesses casos, o domínio é o maior conjunto de números reais para o qual o valor $f(x)$ é um número real, ou seja, o conjunto de todos os números que se pode calcular $f(x)$.

Se alguma vez colocarmos um número em uma função e não conseguirmos obter uma saída, saberemos que há algum tipo de problema de domínio. As ocorrências mais comuns estão relacionadas ao fato de que **não se pode dividir por zero** e **só se pode calcular raízes quadradas de números maiores ou iguais a zero**. Outros problemas podem surgir se você estiver calculando coisas como logaritmos, mas trataremos deles em outro material.

2.1 Exercícios

Exercício 1: Determine o domínio de cada função f , ou seja, o conjunto de todos os números reais para os quais a expressão algébrica de $f(x)$ faça sentido e produza um número real. Veja os exemplos resolvidos.

a) $f(x) = \frac{2x+1}{3x-4}$

Aqui, dado x , calculamos $2x+1$ e dividimos por $(3x-4)$. Para fazer esses cálculos, temos que fazer contas de multiplicação, como 2 vezes x e 3 vezes x , soma, como em $2x+1$, subtração, como em $3x-4$ e divisão, que é $\frac{2x+1}{3x-4}$. A única operação que possui restrição é a divisão, pois não podemos dividir por zero, mas podemos multiplicar, soma e subtrair quaisquer números.

Portanto, $3x-4$ não pode ser zero, isto é,

$$3x-4 \neq 0 \Rightarrow 3x \neq 4 \Rightarrow x \neq \frac{4}{3}$$

Escrevemos que o domínio de f é $D(f) = \left\{ x \in \mathcal{R} : x \neq \frac{4}{3} \right\}$, em que $\mathcal{R}$ é o conjunto de todos os números reais.

b) $f(x) = \frac{\sqrt{2x+3}}{x-6}$

Aqui, além de não poder dividir por zero, logo $x-6 \neq 0$, não podemos calcular raiz quadrada de número negativo, ou seja, $2x+3 \geq 0$.

Portanto, temos duas condições

$$x-6 \neq 0 \Rightarrow x \neq 6 \tag{1}$$

$$2x+3 \geq 0 \Rightarrow 2x \geq -3 \Rightarrow x \geq -\frac{3}{2} \tag{2}$$

$$D(f) = \left\{ x \in \mathcal{R} : x \neq 6 \text{ e } x \geq -\frac{3}{2} \right\}$$

$$\text{a)} f(x) = \frac{4x-9}{7x+5}$$

$$\text{b)} f(x) = \sqrt{x-6}$$

$$\text{c)} f(x) = \frac{\sqrt{x-5}}{x-7}$$

$$\text{d)} f(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{x^2-4}$$

2.2 Respostas dos exercícios

$$\text{a)} D(f) = \left\{ x \in \mathcal{R} : x \neq -\frac{5}{7} \right\}$$

$$\text{b)} D(f) = \{x \in \mathcal{R} : x \geq 6\}$$

$$\text{c)} D(f) = \{x \in \mathcal{R} : x \geq 5 \text{ e } x \neq 7\}$$

$$\text{d)} D(f) = \{x \in \mathcal{R} : x > -2 \text{ e } x \neq 2\}$$

3 Funções definidas por partes

Às vezes, uma função é definida usando diferentes equações em diferentes partes do seu domínio. Por exemplo, a função de valor absoluto ou módulo, $f(x) = |x|$, é na verdade definida por duas equações: $f(x) = |x| = x$ se $x \geq 0$ e $f(x) = |x| = -x$ se $x < 0$. Por conveniência, essas equações são geralmente combinadas em uma expressão como

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Quando uma função é definida por diferentes equações em diferentes partes de seu domínio, ela é chamada de função definida por partes.

3.1 Exercícios

Exercício 1: Calcule os valores pedidos para cada função. Veja o exemplo resolvido.

a) Calcule $f(-2)$, $f(1)$ e $f(2)$.

$$f(x) = \begin{cases} -2x + 1, & \text{se } x < 1 \\ 2, & \text{se } x = 1 \\ x^2, & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

Como $-2 < 1$, temos

$$f(-2) = -2(-2) + 1 = 4 + 1 = 5$$

$$f(1) = 2$$

Como $2 > 1$, temos

$$f(2) = 2^2 = 4.$$

a) Calcule $f(-2)$, $f(4)$ e $f(5)$.

b) Calcule $f(-1)$, $f\left(-\frac{1}{2}\right)$ e $f(2)$.

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 3, & \text{se } x < 4 \\ x^2 - 1, & \text{se } x \geq 4 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 2, & \text{se } x \leq -1 \\ |x| - 5, & \text{se } -1 < x < 2 \\ x^2, & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$

Exercício 2: Considere a função definida apenas em números naturais por $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ e, para calcular f nos valores seguintes, temos antes que verificar o número é par ou ímpar. Se o número for par, então o valor da função neste número é igual ao valor da função calculado na metade deste número. Já se o número for ímpar, o valor da função neste número é igual ao número ao quadrado. Ou seja,

$$\begin{cases} f(2n) = f(n) \\ f(2n+1) = (2n+1)^2 \end{cases}$$

Calcule $f(2)$, $f(3)$ e $f(6)$.

Exercício 3: Em maio de 2024, a CASAN cobra R\$37,31 de tarifa fixa de disponibilidade de infraestrutura (TFDI) e aplica aos imóveis com ocupação exclusiva para fins de moradia a seguinte tabela tarifária.

Faixa	Volume (m^3)	R\$/ m^3
1	1 a 10	R\$2,48
2	11 a 25	R\$ 11,53
3	26 a 50	R\$ 15,41
4	51 a 9999999	R\$ 19,39

a) Qual o valor cobrado de uma casa que consumiu $8 m^3$?

b) Qual o valor cobrado de uma casa que consumiu $22,5 m^3$?

c) Qual o valor cobrado de uma casa que consumiu $x m^3$?

Exercício 4: Considere um país que cobra os seguintes valores de imposto de renda.

Renda anual	Imposto cobrado
Menor que \$20000	0
\$20000-\$60000	2% do que excede \$20000
Maior que \$60000	\$1200 mais 5% do que excede \$60000

a) Qual o valor cobrado de imposto de uma pessoa com renda anual de \$22500?

b) Qual o valor cobrado de imposto de uma pessoa com renda anual de \$86000?

c) Qual o valor cobrado de imposto de uma pessoa com renda anual de \$ x ?

3.2 Respostas dos exercícios

1.

a) $f(-2) = -1, f(4) = 15, f(5) = 24.$

b) $f(-1) = -5, f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{9}{2}, f(2) = 4.$

2. $f(2) = f(1) = 1, f(3) = 3^2 = 9, f(6) = f(3) = 9.$

3.

a) $C(8) = 8 \cdot 2,48 + 37,31 = 19,84 + 37,31 = 57,15$

b) $C(22,5) = 10 \cdot 2,48 + (22,5 - 10) \cdot 11,53 + 37,31 = 24,8 + 144,125 + 37,31 = 206,235$

c)
$$C(x) = \begin{cases} (2,48)x + 37,31, & \text{se } x \leq 10 \\ (11,53)(x - 10) + 62,11, & \text{se } 10 < x \leq 25 \\ (15,41)(x - 25) + 235,06, & \text{se } 25 < x \leq 50 \\ (19,39)(x - 50) + 620,31, & \text{se } x > 50 \end{cases}$$

4.

a) $C(22500) = (22500 - 20000) \frac{2}{100} = \frac{2500 \cdot 1}{50} = 50$

b) $C(86000) = (86000 - 60000) \frac{5}{100} + 1200 = 26000 \cdot \frac{1}{20} + 1200 = 1300 + 1200 = 1500$

c)
$$C(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 20000 \\ (x - 20000) \frac{2}{100}, & \text{se } 20000 \leq x \leq 60000 \\ (x - 60000) \frac{5}{100} + 1200, & \text{se } x > 60000 \end{cases}$$