## Resolvendo equações em uma sala de aula da terceira série

O exemplo a seguir vem de uma turma da terceira série (8-9 anos) que seguimos como parte de um estudo de pesquisa longitudinal de cinco anos sobre o desenvolvimento do pensamento algébrico em crianças pequenas (Radford, 2010, 2018c). Nos dias anteriores ao nosso exemplo, os alunos e o professor trabalharam em problemas de palavras que os alunos tiveram que traduzir em uma equação e depois resolver, usando um sistema semiótico muito simples: um sistema semiótico com três sinais concretos: envelopes de papel, cartões de papelão e o sinal de igual (=).

Os problemas encenaram dois indivíduos, cada um com vários cartões e envelopes. A declaração do problema especificava as quantidades correspondentes e o fato de que cada um dos envelopes continha o mesmo número desconhecido de cartões dentro. A afirmação do problema afirmava que ambos os indivíduos possuíam igual número de cartões.

Em termos educacionais gerais, os problemas que os professores dão a seus alunos para resolver não são cognitiva nem culturalmente neutros. Estão inseridos na primeira e segunda dimensões do SSSC que atua no nível escolar e que, por meio da prática do que conta como problema, naturaliza a forma como os problemas são colocados e resolvidos. Inevitavelmente, os problemas mostram ostensivamente alguns aspectos da natureza do mundo (por exemplo, como um problema é matematizado); Eles também fornecem uma base para ilustrar como, por meio de sua resolução, a verdade pode ser estabelecida. Isso obviamente se aplica ao que aconteceu em nossa turma da terceira série. O sistema semiótico visual concreto de letras e envelopes mencionado, os problemas e suas soluções já transmitem a racionalidade instrumental e sistemática que, historicamente falando (Radford, 2006), foi uma característica proeminente da constituição do pensamento algébrico no Renascimento e no início da era moderna (Viète, 1983; Descartes, 1886).

---

O trabalho sobre equações no terceiro grau continuou no quarto grau, com a introdução do sistema semiótico alfanumérico padrão. A Figura 44, à esquerda, mostra o professor e um grupo de três alunos discutindo a equação que, na simbologia alfanumérica, corresponde a $2x = x + 5$ (há dois envelopes de um lado da equação e um envelope e cinco cartões do outro lado da equação). A Figura 44, à direita, mostra um aluno durante uma discussão geral resolvendo a equação que, na simbologia alfanumérica, corresponde a $3x + 1 = x + 5$ (um envelope é coberto pelo braço do aluno). Nesse sistema semiótico concreto e visual, as "operações" de "envelopes" e "cartões", como adição, subtração e divisão, permanecem ostensivamente mostradas por meio da justaposição, eliminação ou agrupamento de signos.

*Figura 44.* Esquerda: O professor e os alunos discutem; Direita: Um aluno resolve o problema

É claro que o tipo de problemas verbais que podem ser "expressos" com tal sistema semiótico é bastante limitado, mas é rico o suficiente para que os alunos encontrem as ideias básicas subjacentes às simplificações das equações lineares para isolar o desconhecido e encontrar a solução.

As ideias básicas de resolução de equações usando álgebra são baseadas em duas regras: "al-gabr" e "al-muquabala", que são explicadas por Mohammed Ben Musa Al-Khwuarizmi em seu tratado *do século IX Al-Kita ̄b al-mukhtaṣar f ī ḥisa ̄b a l -jabr wa ʾa l-muqa ̄bala* (O *Livro Compêndio sobre Cálculo por Reparo e Comparação*; edição crítica em Hughes, 1986). O termo *Al-Gabr* significa completar, preencher, restaurar adicionando algo (uma parte que falta de um todo). Em uma equação, digamos A = B, uma certa combinação de números (diríamos uma certa expressão algébrica) é restaurada para A adicionando o número de números ausentes. Assim, se A é 10–2*x*, a expressão 2x é adicionada a A (e B), para completar o que falta a 10. A outra regra – a de *al-muquabala*, que significa confrontar, colocar em oposição – permite que números constantes e desconhecidos operem entre eles, agrupá-los na mesma expressão; isto é, para usar uma expressão moderna, colocá-los do mesmo lado da igualdade (Radford, 1995). Na Figura 44, à direita, vemos um aluno removendo um cartão do lado esquerdo da equação (ele fará o mesmo no lado direito da equação). Esta é uma aplicação da regra *al-muquabala*. Com nosso sistema semiótico simples de cartões e envelopes, os alunos não podem se familiarizar com a regra *al-gabr*. O sistema é muito simples. Tivemos que esperar até a quarta série para que os alunos começassem a usar a regra *al-gabr*. É claro que essas regras não foram introduzidas na sala de aula com seus próprios nomes e significados históricos. Se eu os menciono aqui, é apenas para lembrar a espessura epistemológico-histórico-cultural das ideias algébricas que convidamos os alunos a encontrar. Se menciono essas regras aqui, é também para nos ajudar a dissipar a ideia de que o conhecimento matemático na sala de aula é a-histórico e acultural. O conhecimento, como argumentei no Capítulo 3, é uma entidade histórico-cultural que se revela à consciência dos alunos por meio da atividade de ensino-aprendizagem em sala de aula. A maneira operativa pela qual o conhecimento é revelado na escola está emaranhada nas suposições que fazemos sobre como o conhecimento se relaciona com o mundo e as estruturas retóricas da verdade que disponibilizamos aos alunos. E essas são precisamente duas das dimensões do SSSC.

Vamos agora parar no ambiente da sala de aula. De acordo com as ideias que apresentei nos capítulos 4, 5 e 7, a atividade de ensino-aprendizagem é considerada um sistema coletivo em movimento. Essa concepção da atividade de ensino-aprendizagem nos permite distinguir "momentos" importantes da atividade. Esses momentos fornecem uma estrutura dinâmica geral para entender e estudar as maneiras pelas quais a atividade é desenvolvida. Esses momentos são diferenciados de acordo com o tipo de interação social que sustenta a circulação de ideias na aula. No exemplo que quero discutir aqui, a interação foi dividida em três momentos.

### *Momento 1*

Nesse ponto, os alunos trabalharam em pequenos grupos para produzir um texto matemático que incluísse uma história de sua invenção, a tradução da história em uma equação algébrica e a solução da equação (veja a Figura 45, imagens acima). Cada grupo tinha uma equipe "correspondente" com a qual podiam trocar textos posteriormente (ver Momento 3).

### *Momento 2*

Nesse ponto, o grupo teve que enviar uma mensagem de texto para a equipe correspondente e vice-versa. Cada grupo trabalhou de forma independente, lendo e avaliando a produção da outra equipe (ver Figura 45, Quadro 3). A avaliação da produção da outra equipe foi baseada em

1. a clareza do texto matemático do outro grupo (entendemos a história, sua tradução em uma equação e a solução proposta?)
2. a correção do texto (o que o texto diz é verdade?); e
3. a persuasão do texto (tudo é matematicamente sólido e convincente?).

### *Momento 3*

Nesse momento, cada grupo se reuniu com seus companheiros correspondentes. Nessa reunião, cada grupo apresentou seus comentários ao outro grupo e uma discussão se seguiu entre as equipes (ver Figura 45, Quadro 4; para uma discussão mais metodológica, ver Radford e Demers, 2004). Limitar-nos-emos aqui a destacar as passagens relativas ao momento 3, especialmente no que diz respeito aos processos de subjetivação.

A equipe de Carl e Sandra - chamada de *Equipe A* a seguir - produziu o seguinte texto.

> No Natal, Calin recebeu três caixas de Webkinz e Samantha uma caixa. Ele [Calin] já tem 4 Webkinz. E Samantha já tem 28 Webkinz. Agora ambos têm a mesma quantidade [de Webkinz][56].

Na Figura 45, as imagens acima mostram o grupo A e a equipe correspondente (equipe B) trabalhando de forma independente para produzir um texto matemático. A imagem inferior esquerda mostra a equipe B examinando criticamente o texto da outra equipe. A outra equipe faz o mesmo. A imagem inferior direita mostra que os membros das duas equipes correspondentes se reúnem para discutir seus textos; da esquerda para a direita, Sara, Sandra, Carl, Elisa e Christine.

A equipe formada por Christine, Elisa e Sara – chamada *de equipe B* – produziu o texto a seguir.

> Martine tem 10 adesivos em sua coleção. Ele recebe um envelope de adesivos de aniversário. Cassidy tem 6 adesivos em sua coleção. E (recebe) 2 pacotes de adesivos para o Natal. Quantos adesivos há em cada envelope?

---

56 Webkinz são pequenos bichos de pelúcia.


*Figura 45.* Trabalho das equipes

A tradução para equações e as soluções das equações são mostradas na Figura 46. Na fila superior, aparece a equação e solução da equipe B e, na linha inferior, a equação e solução da equipe A.

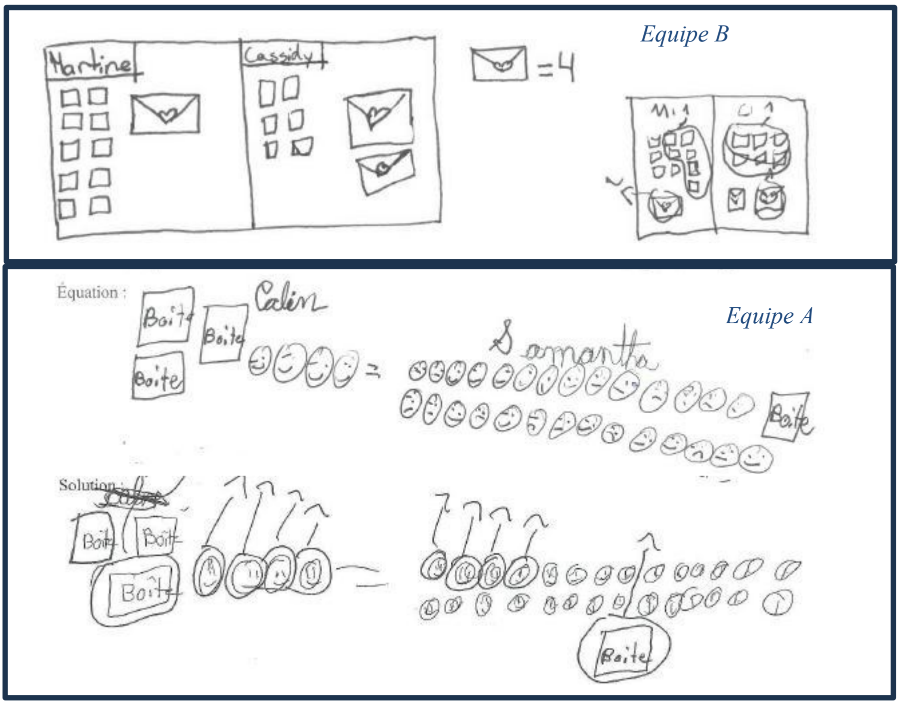


*Figura 46.* Equação e solução das duas equipes

Terminados os momentos 1 e 2, a professora convidou os grupos a se encontrarem; Ela lembrou aos grupos os pontos em que eles deveriam se concentrar no texto (ou seja, clareza, correção, persuasão). Depois de organizar os grupos, ele saiu para ver outras equipes.

A equipe A começa a discussão.

1 Carl: Hum, o que gostamos foi que sua história era clara, não havia erros, podíamos lê-la bem. Isso é o que gostamos em sua história.

2 Sandra: (*Aponta para a abordagem de solução da outra equipe*) É bom, como fazer [assim]...

3 Christine: É isso que você gostou na equação?

4 Sandra: E aqui, aqui (*aponta para a solução da equação*) o que gostamos é que eles colocaram o envelope igual a 4.

A equipe B continua a discussão e dá a razão de seus julgamentos.

5 ELISA: Nós realmente gostamos da história deles, porque eu amo o Webkinz, mas a única coisa é ... eles não perguntaram ... era...

6 Carl: (*Interrompe*) Não, [agora]... você diz o que gostou.

7 ELISA: Oh, tudo bem. O que eu gosto... de sua história é que... Posso ver que está muito claro, não há manchas; você pode até ver tudo... Eu vi isso, eles até escreveram as palavras para [dizer] o que (*Aponta para os desenhos*). Eles mostraram as caixas [Webkinz], como aqui ... (*aponta para as palavras* Caixas *na equação de grupo de Carl*)... e o que me fez gostar da sua solução é que, eu vi que você cercou bem [os objetos removidos na simplificação da equação]... não mancharam na parte superior, né (*Risos*).

Podemos ver nesta breve passagem como os dois grupos começam sua discussão. Eles leem, interpretam e fazem um primeiro julgamento sobre o texto matemático do outro grupo. Os alunos começam destacando itens que consideram bem-feitos. Essa abordagem, que pode parecer desinteressante, permite, no entanto, que os alunos se aprofundem na prática matemática e comecem a se posicionar nela. Na ausência do professor, eles se organizam. Na linha 5, Elisa começa um comentário sobre as inadequações do texto do outro grupo; na linha 6, Carl lembra a ela que ainda não é hora de criticar. Certamente, a linguagem matemática ainda é frágil; O uso fluente de termos técnicos no discurso matemático ainda escapa aos alunos. Assim, na linha 7, Elisa diz: "Vi que eles cercaram bem..."; A frase permanece inacabada. Mas o outro grupo entende que se refere aos objetos eliminados na simplificação da equação (ou seja, a aplicação da regra *al-muquabala*; veja a imagem inferior direita da Figura 46). Isso faz parte do processo de subjetivação por meio do qual os alunos encontram outras vozes, tornam-se um espaço para si mesmos e adotam uma perspectiva no mundo social. Igualmente importante no desenvolvimento do processo coletivo de subjetivação é o fato de que os alunos passam a demonstrar empatia pelos outros: eles se esforçam para compreender o texto dos outros.

Os grupos então passam a discutir o que eles acham que poderia ser melhorado no texto do outro grupo.

8 Carl: Em sua equação, eles não colocaram o sinal de igualdade (veja a imagem acima do figura 46).

9 Sandra: E você tem que colocar isso!

*10* Carl: Você sempre tem que colocar isso. Aqui está o que você deve ter feito (*aponta para sua própria página e mostra para você*).

11 Christine: Foi ideia da Elisa e da Sara!

12 Carl: (*Refere-se à simplificação da equação*) Não o fizeram um por um. Também (*refere-se à solução da equação*) 4 O quê? Não sabemos 4 o quê? Eles escreveram 4; Eles deveriam ter escrito "cartões".

13 ELISA: ... não cartões, "adesivos"; eles são "adesivos".

Como acabamos de ver, os alunos da equipe A apontam os três elementos a seguir:

1. A ausência do sinal de igual na equação da equipe B (linhas 8, 9 e 10).
2. O procedimento para simplificar a equação (a regra *al-muquabala*): em vez de remover os objetos de cada lado da equação um por um, os alunos eliminaram 6 objetos ao mesmo tempo em cada lado da equação (linha 12).
3. Falha em retornar ao problema original para identificar a natureza da solução ("4" vs. "4 adesivos") (linhas 12 e 13).

Os alunos da equipe B aceitaram 1 e 3, mas não aceitaram 2. A disputa das equipes dizia respeito às estruturas retóricas da verdade. Em seguida, foi a vez da equipe B fazer suas críticas. As críticas da equipe B se concentraram na falta de perguntas no texto da equipe. As críticas deram origem a um intenso debate. Abaixo está um breve trecho.

14 ELISA: Você não disse "quantos... [Webkinz]" como "quantos estão em cada caixa?"

15 Sandra: Você não deve dizer quantos... em todas as caixas!

16 Carl: (*De acordo com sua companheira de equipe*) Não supunha que você faça isso!

17 Sandra: (*Explica melhor*) Porque você deve descobrir quantos estão em cada caixa!

18 ELISA: (*De acordo com seus companheiros de equipe*) Sim, você tem que perguntar como, deixe [ver]... Como [nós] escrevemos "... Quantos adesivos há em cada envelope?" É isso que tens que procurar!

Elisa tem dificuldade em articular suas críticas. A conversa não parece ser sobre o mesmo objeto de discurso. Carl e Sandra acreditam que Elisa pede que eles mencionem a resposta na história que compuseram. As equipes não conseguem chegar a um acordo. Eles decidem continuar a discussão sobre outros pontos. A discussão gira em torno da solução da equação. A equipe B reclama que os objetos foram desenhados muito pequenos, mas os alunos acabam concordando que o tamanho dos objetos desenhados não importa. O tamanho pode ser ignorado. Faz parte da abstração do pensamento matemático. Eles também discutiram o tipo de números usados no texto da equipe A. A equipe B sugeriu que leva muito tempo para resolver uma equação com um número grande como 28. Os alunos da equipe B sentiram que, se a equipe A tivesse usado 100, levaria cerca de 10 minutos para resolver a equação. A equipe A sugeriu o uso de círculos para números grandes, criando assim uma nova notação simbólica. A discussão não foi mais longe, mas a ideia permaneceu na mesa. E, de fato, esse é o caminho que esta turma explorará no próximo ano com outro professor.

As passagens acima mostram os processos de objetivação e subjetivação. Mostram, com efeito, o encontro dos alunos com as formas culturais em que os problemas de álgebra são formulados, traduzidos em uma equação e resolvidos, e ao mesmo tempo mostram como os alunos se posicionam e são posicionados pelos outros. Havia vários pontos que permaneciam por resolver (por exemplo, a questão da eliminação de vários elementos ao mesmo tempo na simplificação da equação e se uma questão tem de ser incluída no texto) e, para ir mais longe, era necessária a intervenção explícita do Professor[57].

Quando os alunos estavam terminando a discussão sobre grandes números, o professor veio ver o grupo.

19 Professora: Que coisas você notou que poderiam ter sido melhoradas no outro grupo? Nada mau. Vamos começar aqui (*aponta para Sandra*).

20 Sandra: Vimos que eles não colocaram o sinal da igualdade.

21 Professora: Ah! Portanto, falta o sinal de igualdade.

57 Digo «a intervenção explícita do professor»; não a «presença explícita do professor», porque o professor esteve presente em todos os momentos. Sua presença se manifesta tanto na organização social da sala de aula quanto na tarefa matemática da qual os alunos participam.

22 Sandra: E então, aqui, eles não os tiraram um por um, eles apenas pegaram um grupo e o tiraram [da equação] (*referindo-se à* regra al-muquabala).

23 Professora: Tudo bem. Eu concordo com [a observação sobre] o sinal de igualdade [ausente], porque é uma equação, Não? Então, isso seria algo para melhorar da próxima vez? Adicione um sinal de igual.

24 Christine: Sim...

25 Professora: A ideia de que eles cercaram todos os 6 [os adesivos] e depois simplesmente tiraram todos esses adesivos de uma vez, eu não tenho nenhum problema com isso.

Os alunos então comunicaram ao professor a crítica da Equipe B sobre a pergunta que faltava no texto da Equipe A, porque, como Christine disse, sem dúvida, "você não sabe o que [você] deve fazer!"

26 Professor: (*Dirige-se aos alunos da equipe A*) O que queremos saber?

27 Carl: … quantos [Webkinz] estão na caixa.

28 Mestre: Queremos saber quantos estão na caixa. Você acha que em uma situação como essa, para alguém que lê isso [o texto], e quer... e então ele quer encontrar a solução... Você acha que é importante adicionar a pergunta? (veja a imagem acima da Figura 47)

29 Sandra: Sim, acho que sim...

30 Carl: Eu digo não, porque em uma história; Nas aventuras, não dizemos como... qual é a solução! (veja a imagem abaixo da figura 47)

31 Professora: Eu acho que, em uma história como essa, é importante ter uma pergunta, se você quiser saber quantos Webkinz estão em cada caixa.

No final, não houve consenso. Carl viu o texto matemático como um texto literário, no qual uma situação é encontrada; então a situação ou "aventura", como ele mesmo a chama, é desenvolvida, o que corresponderia à simplificação da equação; Em seguida, segue o final, que consiste em nomear a solução.

Em certo sentido, a intervenção do professor poderia ser considerada uma falha na institucionalização do conhecimento. Visto por esse ângulo, nas passagens anteriores, o professor teria perdido a oportunidade de indicar aos alunos como um problema é colocado e, em particular, o papel da questão. Vista de perto, a professora se posicionou no debate (ver linhas 21, 23 e 25 acima). Mas ele tenta fazê-lo sem impor sua autoridade. A questão não é livrar-se da autoridade, mas exercê-la com responsabilidade; isto é, levar em conta as vozes, gestos e perspectivas dos outros.

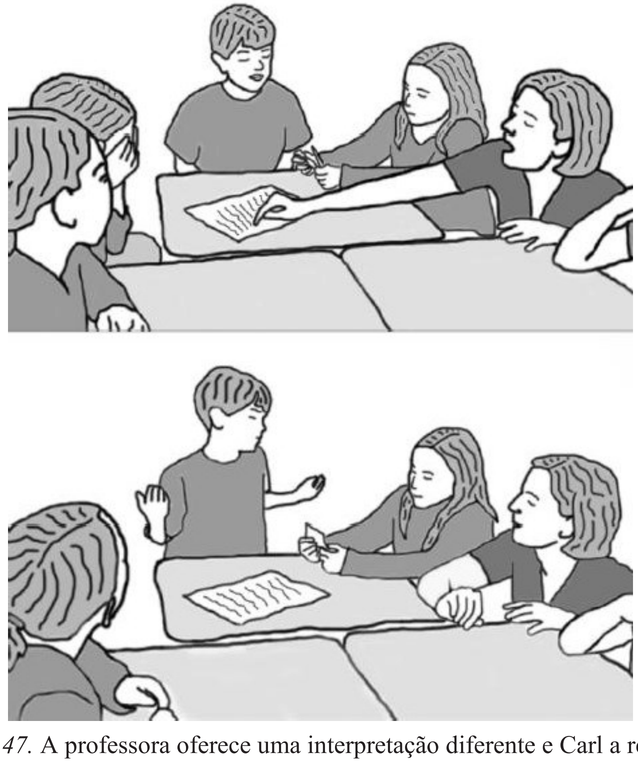

*Figura 47.* A professora oferece uma interpretação diferente e Carl a refuta

Na teoria da objetivação, o professor se vê como a personificação na sala de aula de uma racionalidade cultural; mas seu objetivo não é impor essa racionalidade – o que seria o caso de uma pedagogia da reprodução. Na teoria da objetivação, o objetivo do professor é oferecer aos alunos outra maneira de olhar para o problema (uma maneira histórica e culturalmente constituída de pensar sobre problemas matemáticos) para os alunos considerarem a partir de sua perspectiva emergente.

Um processo de objetivação não consiste em impor uma forma de ver o mundo e submeter o aluno a ele. A objetivação consiste em um encontro sempre inacabado e crítico com o conhecimento. E esta é precisamente a oferta que a professora faz aos alunos na linha 28: "Você acha que...?" A professora entra em uma situação dialógica que necessariamente a torna vulnerável. Pode ser refutada. Mas ser refutada não é algo a ser evitado. Pelo contrário: ser refutada faz parte do coposicionamento coletivo de vozes e subjetividades, das alunas, mas também da voz e da subjetividade do professor. Nessa linha de pensamento, em que o professor não desempenha o papel de patriarca do conhecimento, o professor não está acima dos alunos. Ele está com os alunos; trabalha com os alunos. Este é o significado do conceito de trabalho conjunto na teoria da objetivação.

De fato, como vimos, o professor é refutado na linha 30. Assim, na linha 31, ele se posiciona, mas, novamente, em harmonia com o projeto ético de ensino-aprendizagem, sem impor sua autoridade. O projeto educativo gira em torno da criação de condições que permitam aos alunos e professores participar na atividade de sala de aula assente em formas não alienantes de interação e colaboração humana, e através das quais professores e alunos se expressam e se posicionam no espaço público e, ao fazê-lo, eles são coproduzidos diariamente. Desse ponto de vista, na linha 31, o professor já pode sair, pode ir falar com outras equipes. Já alcançou seu objetivo didático. É claro que a discussão continuará e novas contradições serão reveladas durante a discussão geral na sala de aula e nos dias e anos que se seguem.