

1

Visão geral da resposta a Intervenção em Matemática

O que é resposta à intervenção?

Resposta à Intervenção (RtI) é uma estrutura inovadora para a melhoria escolar, projetada para ajudar *todos os* alunos a alcançar proficiência acadêmica e comportamental. Seu objetivo é prevenir dificuldades de aprendizagem por meio de instrução eficaz e de alta qualidade, identificação precoce de problemas e serviços de intervenção em níveis. O progresso de todos os alunos é monitorado duas ou três vezes por ano para identificar indivíduos que possam precisar de apoio adicional *antes de* fracassarem. Os alunos com dificuldades recebem intervenções direcionadas e baseadas em pesquisas por meio de um sistema de apoio em níveis. Seu progresso é monitorado frequentemente, e os dados dessas avaliações embasam as decisões de ensino. Além disso, os distritos monitoram a entrega do ensino, a avaliação e os serviços de intervenção para garantir que sejam implementados conforme o esperado.

Nos últimos 5 anos, a terminologia para descrever o RtI mudou em todo o país. Em uma revisão de 2019 da terminologia usada nos sites dos Departamentos Estaduais de Educação dos EUA, um pequeno número de estados (ou seja, Texas, Novo México e Maine) continua a usar principalmente o termo Resposta à Intervenção. A grande maioria dos estados passou a usar o termo Sistemas de Apoio Multiníveis ou MTSS para descrever um sistema mais abrangente que abrange aspectos acadêmicos, comportamentais e uma estrutura mais ampla para a melhoria escolar. Muitos estados usam os termos RtI e MTSS de forma intercambiável ou mudaram completamente para usar apenas MTSS.

Outros especialistas em educação observam pequenas diferenças entre essas duas estruturas. Historicamente, o RtI se concentrava em abordar os déficits acadêmicos dos alunos em leitura e matemática. À medida que a estrutura do RtI evoluiu para o MTSS, incluiu as necessidades comportamentais e se tornou uma estrutura mais abrangente para toda a escola, visando a melhoria contínua e integral da escola. Em um esforço para ser inclusivo e honrar tanto o termo original RtI quanto os estados que ainda o utilizam, este livro incluirá RtI e MTSS juntos (RtI/MTSS) ao se referir à estrutura geral, e apenas RtI ao se referir especificamente ao atendimento das necessidades dos alunos em matemática.

A legislação histórica "Nenhuma Criança Deixada para Trás" (NCLB, 2001) concentrou-se em aumentar a responsabilização das escolas, no uso de currículos baseados em pesquisas, em professores altamente qualificados e na comunicação com os pais sobre a proficiência acadêmica de seus filhos. A Lei de Melhoria da Educação para Indivíduos com Deficiência (IDEA, 2004), reautorizada, também

exigiu que os estados incluíssem o monitoramento frequente do progresso dos alunos no currículo geral como parte ou antes do processo de encaminhamento para educação especial. Ambas as leis enfatizam os princípios-chave do RtI/MTSS: monitoramento do progresso; ensino de alta qualidade baseado em pesquisa; aplicação de um processo de resolução de problemas baseado em pesquisa; e maior responsabilização.

Embora o RtI/MTSS inclua um processo usado para determinar as necessidades educacionais dos alunos, ele não é sinônimo do processo de encaminhamento para educação especial.

Nos últimos dez anos, profissionais de todo o país trabalharam para refinar os princípios e diretrizes gerais para a implementação do RtI/MTSS. Em 2015, o presidente Obama sancionou a lei Every Student Succeeds Act (ESSA). Essa reautorização da Lei de Educação Elementar e Secundária (ESEA) se concentrou em diminuir a lacuna de desempenho entre os alunos e fornecer acesso igualitário a instrução de alta qualidade por meio de avaliação e responsabilização aprimoradas. Embora os detalhes da implementação de um modelo multinível possam variar de acordo com o contexto local, os seguintes componentes críticos são constantes: (1) fornecer instrução baseada em evidências a todos os alunos, (2) usar dados para orientar a tomada de decisões instrucionais e avaliar a eficácia instrucional e (3) usar vários níveis de suporte para fornecer intervenções cada vez mais intensas e direcionadas para alunos em risco de fracasso acadêmico.

Instrução baseada em evidências

Um princípio fundamental do RtI/MTSS é que todos os alunos devem receber instrução de alta qualidade, utilizando métodos validados por meio de pesquisas rigorosas. No passado, a pedagogia era frequentemente baseada em teorias educacionais ou nas preferências dos educadores, em vez de pesquisas científicas. No entanto, os pesquisadores têm se concentrado cada vez mais na identificação de práticas instrucionais eficazes. Como resultado, os educadores têm acesso a uma lista crescente de procedimentos e programas instrucionais que comprovadamente aumentam significativamente a aprendizagem dos alunos durante experimentos científicos rigorosos.

Infelizmente, a pedagogia baseada em evidências às vezes demora a chegar às salas de aula. Estudos documentam que muitas estratégias baseadas em evidências não são rotineiramente incluídas em livros didáticos e guias para professores comumente utilizados em nossas escolas (Bryant et al., 2008; Hodges, Carly e Collins, 2008; NMAP, 2008). Embora a maioria das editoras forneça pesquisas e depoimentos afirmando que seus produtos alcançarão resultados milagrosos, muitos dos estudos citados não atendem aos critérios metodológicos exigidos para uma pesquisa de alta qualidade.

Para se qualificar como pesquisa "baseada em evidências" segundo a Lei Every Student Succeeds Act (ESSA), um estudo deve atender a padrões rigorosos, incluindo o uso de observação ou experimento sistemático, medições ou métodos de observação que comprovadamente forneçam dados válidos e confiáveis, e análise rigorosa dos dados. Os participantes, o cenário e a metodologia devem ser descritos com detalhes suficientes para permitir que outros pesquisadores repliquem o estudo e comparem os resultados. O estudo deve ter uma amostra grande (350 participantes), um efeito significativamente positivo e ser implementado em pelo menos dois locais educacionais.

Além disso, para que uma prática baseada em evidências seja rotulada como "baseada em evidências", ela deve ser apoiada não apenas por um único estudo, mas por múltiplos estudos que atendam aos padrões de rigor metodológico delineados pela What Works Clearinghouse, uma fonte confiável de evidências científicas sobre programas educacionais, intervenções e práticas instrucionais (What Works Clearinghouse, 2020).

Embora a pesquisa de alta qualidade que avalia programas completos de matemática esteja melhorando, um conjunto significativo de pesquisas descreve procedimentos instrucionais que se mostraram eficazes para o ensino de matemática. Esses métodos produziram efeitos positivos significativos em diversos estudos de alta qualidade. O What Works Clearinghouse fornece

informações sobre programas que foram avaliados com rigorosos padrões científicos. No **Capítulo 3**, apresentamos uma visão geral dos principais métodos de ensino baseados em evidências para matemática. Cada estratégia é descrita em maiores detalhes nos capítulos subsequentes. Essas práticas atendem aos altos padrões de pesquisa definidos pelo IES/WWC.

Instrução baseada em dados

A Instrução Orientada por Dados (DDI) é um pilar fundamental da RtI. Dados de avaliação são coletados e utilizados para avaliar materiais e programas instrucionais e para orientar decisões instrucionais para alunos individuais e grupos de alunos. Dentro de uma estrutura RtI/MTSS, ocorrem três tipos de avaliação: (1) triagem universal, (2) monitoramento do progresso e (3) diagnóstico.

• **Triagem universal:** a triagem universal é o primeiro passo no processo de coleta de dados. As informações obtidas permitem que um distrito avalie a eficácia de seu programa educacional principal e identifique alunos com dificuldades ou em risco de dificuldades matemáticas. A triagem universal geralmente é realizada de duas a quatro vezes por ano. A equipe escolar pode avaliar o desempenho dos alunos em testes estaduais ou distritais recentes ou aplicar um teste de triagem de matemática. Os resultados são usados para identificar alunos que não estão progredindo adequadamente em matemática e que precisam de apoio adicional para atingir proficiência em matemática. O Centro Nacional de Intervenção Intensiva ([https://](https://intensiveintervention.org/)

intensiveintervention.org/) fornece diretrizes para a seleção de avaliações e inclui análises de diversos instrumentos de avaliação. O Center on Multi-Tiered System of Supports (www.mtss4success.org) também fornece orientações para a seleção de avaliações.

• **Monitoramento do Progresso:** alunos que não apresentam progresso adequado, conforme indicado pelos resultados da triagem universal, recebem monitoramento do progresso com mais frequência. Normalmente, isso envolve a aplicação de avaliações curtas que podem detectar pequenas mudanças na aprendizagem dos alunos. As respostas dos alunos à intervenção são usadas para avaliar a eficácia das intervenções atuais e orientar a decisão de aumentar ou diminuir o nível de apoio fornecido ou de manter ou alterar as estratégias de intervenção.

• **Avaliação Diagnóstica:** as avaliações diagnósticas fornecem informações mais detalhadas sobre os pontos fortes e fracos dos alunos em áreas específicas de habilidades. Essa avaliação formativa ajuda os professores a identificar o conteúdo matemático específico a ser abordado e a selecionar estratégias e atividades de ensino adequadas.

Cada um desses tipos de avaliação será discutido com mais detalhes no **Capítulo 2**.

Suporte em camadas

Em um modelo RtI/MTSS, níveis são usados para fornecer suporte cada vez mais intensivo a alunos com dificuldades. O termo "intervenção" é usado para descrever os procedimentos instrucionais utilizados para apoiar indivíduos que não progrediram adequadamente no currículo básico. Intervenção é "ajuda extra ou instrução extra direcionada especificamente para habilidades que um aluno não adquiriu" (Pierangelo & Giuliani, 2008, p. 80). Geralmente, o RtI/MTSS é descrito como um modelo de apoio de três níveis, com cada nível representando níveis de intervenção cada vez mais intensos. Os recursos online incluem uma visão geral do apoio crescente fornecido em cada nível.

Nível 1: Sala de aula geral

O Nível 1 representa a sala de aula geral, onde um currículo básico de alta qualidade e baseado em evidências é oferecido de acordo com os padrões estaduais. Pesquisas não identificaram claramente um tempo ideal para o ensino de matemática do Nível 1, mas geralmente são alocados de 50 a 60 minutos por dia. Espera-se que os professores diferenciem o ensino para atender às necessidades dos alunos que atuam em diferentes níveis na sala de aula do ensino regular. O currículo básico deve permitir que pelo menos 80% dos alunos alcancem proficiência em matemática. Como o objetivo do RtI/MTSS é reduzir o número de alunos que necessitam de intervenções mais intensivas, no Nível 1, os professores devem ser proficientes no fornecimento de ensino de alta qualidade e nas estratégias de intervenção baseadas em evidências descritas nos capítulos subsequentes.

A triagem universal é realizada pelo menos duas vezes por ano, e os resultados são usados para avaliar a eficácia do programa principal e para detectar precocemente indivíduos que possam precisar de apoio adicional. As escolas normalmente definem as notas de corte para determinar o nível de proficiência acadêmica. Algumas escolas utilizam normas nacionais, mas muitas determinam suas próprias normas locais. Alunos com desempenho igual ou superior ao nível "proficiente" continuam a receber instrução na sala de aula regular, incluindo instrução diferenciada. Alunos abaixo do nível "proficiente" — ou seja, aqueles que não progrediram o suficiente no ambiente da sala de aula regular — podem precisar de apoio educacional adicional (Nível 2 ou Nível 3), dependendo da gravidade da necessidade.

Nível 2: Suporte Suplementar

Os alunos que não progrediram o suficiente recebem apoio suplementar, além do ensino de matemática oferecido na sala de aula regular. Grupos homogêneos de dois a cinco alunos se reúnem por aproximadamente 30 minutos por dia para receber instruções direcionadas do Nível 2, que complementam o que recebem no currículo básico. O conteúdo dessas instruções suplementares aborda lacunas no conhecimento dos alunos ou se concentra em instruções estendidas sobre conceitos-chave. Não se trata de uma sessão de tutoria para ajudar os alunos a concluir as tarefas gerais da sala de aula, mas sim de uma oportunidade para os alunos desenvolverem ou consolidarem conceitos e habilidades ausentes, necessários para obter proficiência em matemática. No modelo RtI/MTSS, uma equipe multidisciplinar de profissionais utiliza dados de avaliação para identificar as deficiências específicas dos alunos e, em seguida, direcionar intervenções para remediá-las. Embora algumas editoras estejam promovendo um "Programa Nível 2" para todos os alunos de um determinado nível de ensino que precisam de apoio adicional, essa abordagem única é incompatível com a ênfase do RtI no ensino baseado em dados.

Raramente todos os alunos com dificuldades em um determinado nível escolar apresentarão déficits de habilidades idênticos. Como o tempo que os alunos passam recebendo apoio de Nível 2 pode significar tempo fora da sala de aula e, portanto, sem participar de outras atividades instrucionais, é importante dedicar esse tempo a fornecer apoio focado nas habilidades específicas que o aluno precisa aprender.

A instrução de Nível 2 é fornecida por pessoal treinado, como um instrutor de matemática, um professor de educação geral ou outro profissional com treinamento especial. O progresso dos alunos que recebem os serviços de Nível 2 é monitorado frequentemente, e os dados são usados para determinar se os alunos ainda precisam de intervenção. Assim que a criança fizer progresso suficiente, o apoio de Nível 2 pode ser gradualmente reduzido. Cerca de 95% dos alunos devem progredir adequadamente com a combinação de instrução de Nível 1 e apoio de Nível 2. Para os alunos que ainda apresentarem progresso insuficiente após receberem os serviços de Nível 2, as equipes de resolução de problemas elaboram um plano para o apoio de Nível 3, que inclui intervenções mais direcionadas e intensivas.

Nível 3: Intervenções Intensivas

Alunos que receberam instrução de alta qualidade, mas não fizeram progresso suficiente no Nível 2, precisam de intervenções mais intensivas direcionadas aos seus déficits de habilidades individuais. Em geral, espera-se que, se os níveis 1 e 2 forem implementados com sucesso, não mais do que 5% dos alunos necessitem dessas intervenções intensivas. Os alunos que recebem serviços do nível 3 geralmente se reúnem por um mínimo de 50 a 60 minutos por dia, além do currículo principal. O nível 3 pode incluir tutoria individual ou a instrução pode ser fornecida para pequenos grupos de dois ou três alunos que demonstrem necessidades semelhantes. A individualização baseada em dados (DBI) é um processo usado para avaliar a eficácia de intervenções mais intensivas usando as seguintes etapas: (1) instrução/intervenção intensiva, (2) monitoramento do progresso, (3) avaliação diagnóstica, (4) mudanças na intervenção e (5) monitoramento contínuo, coleta de dados e avaliação (National Center on Intensive Interventions, 2020). Essas etapas fornecem monitoramento frequente e avaliação diagnóstica mais aprofundada para garantir intervenção/instrução intensiva eficaz para os alunos com maior necessidade de suporte adicional.

Ocasionalmente, alunos que recebem serviços especiais podem seguir um currículo diferente no lugar do programa principal de matemática. A decisão de remover uma criança do programa principal só pode ser tomada por uma equipe de plano educacional individualizado (PEI). Com exceção dos alunos cujo PEI especifica que a criança não participará do ensino principal de matemática, todos os alunos recebem apoio de Nível 3, além do currículo principal.

O método de prestação de apoio intensivo e individualizado normalmente inclui três níveis de apoio. A grande maioria dos estados adotou um modelo de três níveis. Os dados coletados em cada nível revelam a capacidade de resposta do aluno à intervenção, e esses dados são usados na tomada de decisões sobre a elegibilidade para educação especial. No entanto, os pais têm o direito de solicitar uma avaliação formal para educação especial a qualquer momento do processo, e o processo de RtI não pode ser usado para atrasar ou negar essa avaliação.

Modelos de Implementação

Duas abordagens para RtI/MTSS são descritas na literatura: um modelo de resolução de problemas e o protocolo de tratamento padrão. Ambas as abordagens oferecem instruções baseadas em evidências a todos os alunos, utilizam dados para orientar a tomada de decisões instrucionais e avaliar a eficácia do ensino, além de utilizar suporte em níveis para fornecer intervenções cada vez mais intensas para indivíduos com dificuldades. As duas abordagens diferem na forma como as intervenções instrucionais são selecionadas para uso em cada nível.

Na abordagem de resolução de problemas, uma equipe toma decisões instrucionais com base nos pontos fortes e fracos de cada aluno, conforme revelados durante a triagem universal e o monitoramento do progresso. A equipe identifica as áreas em que o aluno apresenta dificuldades e, em seguida, desenvolve um plano de intervenção adaptado às necessidades do aluno. Embora grupos de alunos com perfis semelhantes sejam reunidos para o ensino, os detalhes da intervenção variam de acordo com as necessidades específicas e os dados de desempenho dos membros do grupo. Essa abordagem é utilizada em escolas há mais de 20 anos e, em geral, é a preferida pelos profissionais.

No protocolo padrão, os líderes escolares normalmente decidem sobre um grupo seletivo de intervenções baseadas em pesquisas que comprovadamente melhoram os resultados dos alunos em áreas específicas. Por exemplo, as escolas podem decidir que um programa específico voltado para o conhecimento de fatos básicos será usado primeiro para os alunos que precisam de instruções adicionais para aprender fatos básicos. Essa abordagem é favorecida pelos pesquisadores porque o uso de um formato padronizado ajuda a garantir a fidelidade da implementação.

Resumo

A Resposta à Intervenção é parte integrante de uma reforma escolar abrangente. As escolas continuarão a aprimorar sua capacidade de atender às necessidades de aprendizagem de alunos com dificuldades, implementando estratégias de ensino baseadas em evidências e utilizando benchmarking e triagem universal como base para a tomada de decisões baseada em dados. Quando as escolas seguem uma estrutura RtI/MTSS, os alunos com dificuldades em matemática recebem intervenções cada vez mais intensivas para complementar o ensino básico baseado em pesquisas. No próximo capítulo, discutiremos o uso da avaliação para tomar decisões de ensino baseadas em dados. No [Capítulo 3](#), definiremos os principais componentes do ensino básico de matemática e descreveremos os métodos de ensino mais eficazes para apoiar alunos com dificuldades.

3

Visão geral das evidências- Práticas Baseadas em Ensino Matemática

Um crescente corpo de pesquisas descreve práticas que são eficazes para o ensino de matemática.

Alunos proficientes em matemática podem ter sucesso sem o benefício de um ensino de alta qualidade, mas as melhores práticas são essenciais para alunos com dificuldades. A implementação consistente de práticas baseadas em evidências é, portanto, o primeiro passo para apoiar alunos em situação de risco. Neste capítulo, discutiremos inicialmente recomendações para um ensino eficaz de matemática no currículo básico. Algumas recomendações para o ensino básico também se aplicam a alunos que precisam de apoio adicional, mas também existem diferenças. Na segunda metade do capítulo, discutiremos recomendações para apoiar indivíduos com dificuldades em matemática e que necessitem de intervenções. Destacaremos como o ensino durante as intervenções deve ser diferente do que ocorre durante o ensino de matemática em um ambiente de educação geral.

Cada uma das recomendações de intervenção será discutida com mais detalhes nos capítulos subsequentes.

Leitores interessados em uma visão geral das recomendações, bem como em uma discussão sobre a justificativa e a pesquisa que as fundamenta, acharão este capítulo útil. Leitores que buscam sugestões sobre como implementar uma intervenção específica podem achar mais útil consultar diretamente o capítulo de interesse.

Práticas Baseadas em Evidências para o Currículo Básico (Nível 1)

O currículo básico é oferecido no Nível 1; é a instrução que *todos* os alunos recebem. Tudo o que acontece na sala de aula de educação geral é considerado parte do currículo básico. Os padrões estaduais especificam o conteúdo a ser abordado em cada nível de ensino. Além disso, a maioria dos distritos compra um programa de matemática que inclui livros didáticos e apostilas, guias do professor descrevendo atividades instrucionais e materiais suplementares. Esse programa faz parte do currículo básico. O currículo básico também inclui tudo o que acontece no Nível 1. Por exemplo, uma escola pode esperar que os professores usem materiais ou atividades adicionais para complementar o programa adquirido, ou um professor pode adicionar atividades ou substituir materiais. A instrução básica não é universal. No Nível 1, o conteúdo, o processo e os produtos são diferenciados em resposta aos interesses, estilos de aprendizagem e prontidão acadêmica dos alunos. Às vezes, a instrução é fornecida em um ambiente de grupo grande e, em outras vezes, os alunos trabalham em pequenos grupos ou de forma independente. Às vezes, os alunos com interesses ou necessidades semelhantes são colocados juntos em grupos homogêneos, enquanto outras vezes, os heterogêneos

grupos são utilizados. O agrupamento flexível permite que os professores adaptem a instrução às necessidades dos alunos. A instrução diferenciada fornece suporte e prática extras para alunos com dificuldades, enquanto alunos avançados podem trabalhar com materiais mais desafiadores.

Um dos pilares do RtI é que todos os alunos devem receber instrução de alta qualidade. Isso significa que os materiais e métodos de ensino utilizados pelos professores devem ser respaldados por pesquisas rigorosas, ou seja, devem ter demonstrado eficácia com a população-alvo em estudos experimentais controlados, e ser implementados com fidelidade. Em 2006, o Departamento de Educação dos EUA nomeou um Painel Consultivo Nacional de Matemática (NMAP), composto por profissionais da educação, pesquisadores com experiência em matemática e ensino de matemática e outras partes interessadas, e encarregou esse Painel de revisar as pesquisas sobre ensino de matemática disponíveis na época e identificar práticas de ensino eficazes para o currículo básico. O relatório final do Painel, *Foundations for Success* (2008), está disponível em www.ed.gov/MathPanel. As recomendações do Painel foram incorporadas aos Padrões Estaduais Básicos Comuns para Matemática (<http://www.corestandards.org/>), publicados em 2010. Os estados que não utilizam os Padrões Estaduais Básicos Comuns também incorporam essas recomendações em seus próprios padrões estaduais. As recomendações para práticas baseadas em evidências no currículo básico (Nível 1) estão resumidas abaixo.

Enfatize conceitos críticos

A primeira recomendação do Painel foi que o currículo para alunos da pré-escola ao oitavo ano fosse simplificado para enfatizar tópicos críticos. Comparações internacionais revelam que países com alto desempenho geralmente se concentram na abordagem aprofundada de cinco ou seis conceitos em cada série. Em contraste, os alunos dos EUA tradicionalmente abordavam mais de 20 (Schmidt, Wang e McKnight, 2005). Para ajudar os alunos a obterem o progresso ideal, os distritos precisam selecionar materiais didáticos essenciais que ofereçam uma abordagem focada e aprofundada dos tópicos enfatizados em seus padrões estaduais e minimizar o tempo gasto em conteúdos menos críticos.

Ensine Fundamentos Críticos para o Domínio

Habilidades fundamentais essenciais devem ser ensinadas até o domínio nas notas indicadas. O Painel especificou: "Qualquer abordagem que revise tópicos ano após ano sem encerrá-los deve ser evitada" (NMAP 2008 Fact Sheet, p. 1). No passado, muitos programas de matemática básica nos EUA seguiam um currículo em espiral, no qual os mesmos tópicos eram ensinados ano após ano. Os professores relatam ter sido orientados a não se preocuparem se um aluno não dominasse uma habilidade ou conceito específico, pois ele seria reintroduzido posteriormente.

No entanto, algumas habilidades e conceitos críticos são pré-requisitos para matemática mais avançada, e os alunos que não conseguem atingir a proficiência terão dificuldades nas aulas subsequentes, ficando cada vez mais para trás (Porter, 1989). Evidências sugerem que os programas mais eficazes evitam introduzir tópicos ano após ano sem um encerramento. Ao selecionar programas para uso em seu currículo básico, os distritos são incentivados a considerar um programa que ensine habilidades fundamentais para o domínio.

Equilibre a compreensão conceitual, a fluência e a resolução de problemas

Historicamente, o ensino de matemática nos Estados Unidos enfatizava a fluência computacional e procedural. Os alunos aprendiam procedimentos de cor, mas frequentemente careciam de compreensão conceitual. Como resultado, alunos que talvez conseguissem preencher uma planilha com rapidez e precisão muitas vezes não conseguiam aplicar as mesmas habilidades quando se deparavam com situações-problema matemáticas da vida real. Para aprimorar a competência matemática dos alunos, os educadores matemáticos

começou a enfatizar a importância do desenvolvimento da compreensão conceitual e do ensino da matemática no contexto da resolução de problemas reais (NCTM, 1989, 2000). Essa mudança de paradigma teve muitos efeitos positivos, mas, infelizmente, algumas salas de aula minimizaram tanto a fluência computacional e procedural que os alunos não conseguiram se tornar proficientes em computação básica. Após examinar pesquisas pertinentes, o Painel concluiu que a compreensão conceitual, a fluência computacional e as habilidades de resolução de problemas se complementam, e todas as três são componentes importantes de um ensino de alta qualidade (NMAP, 2008). Essas recomendações foram incorporadas aos Padrões Estaduais Básicos Comuns (www.corestandards.org), bem como padrões estaduais individuais. Ao adotar material para um currículo básico, os distritos devem, portanto, selecionar programas que equilibrem compreensão conceitual, fluência computacional e procedural e resolução de problemas.

Use uma combinação de abordagens centradas no professor e no aluno

Nos últimos anos, os educadores matemáticos têm adotado uma abordagem investigativa que enfatiza a compreensão conceitual em vez da memorização de fatos ou do ensino de um algoritmo específico. O professor primeiro envolve os alunos em um problema da vida real. Em vez de dizer aos alunos como resolver o problema, os professores dão aos alunos tempo para explorar e trabalhar em colaboração para encontrar uma solução. O papel do professor é facilitar a aprendizagem dos alunos e criar um ambiente de sala de aula no qual diferentes ideias matemáticas sejam compartilhadas e valorizadas (Hiebert et al., 1997).

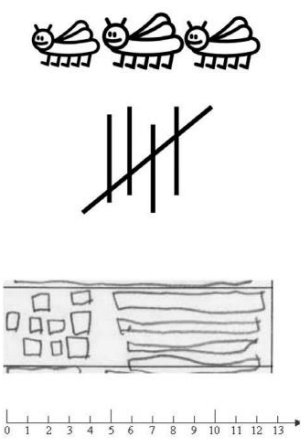
Enquanto professores de educação geral são frequentemente ensinados a usar exclusivamente o método de investigação, professores de educação especial são ensinados a usar um modelo de instrução explícita, porque pesquisas extensas documentam o valor da instrução explícita para alunos com deficiência e outros alunos com dificuldades (McLeskey et al., 2017). A instrução explícita é mais direcionada pelo professor. Os professores dividem as habilidades em pequenas etapas e ensinam explicitamente algoritmos para resolver cada tipo de problema, primeiro modelando uma habilidade e, em seguida, reduzindo gradualmente o suporte à medida que os alunos adquirem proficiência. Como a sala de aula típica contém uma ampla gama de alunos, os resultados da pesquisa sugerem que o currículo básico não deve depender exclusivamente de nenhum dos modelos de instrução. Em vez disso, os distritos devem buscar programas de currículo básico que ofereçam uma abordagem equilibrada ao ensino de matemática (NMAP, 2008).

Siga a sequência CPA

O NMAP (2008) recomendou que alunos de todas as séries e níveis de desempenho experimentem instruções que incorporem o uso progressivo de objetos manipuláveis concretos, modelos pictóricos bidimensionais e, em seguida, símbolos abstratos. Objetos manipuláveis são objetos concretos que “apelam a vários sentidos e que podem ser tocados, movimentados, reorganizados e manuseados por crianças” (Kennedy, 1986, p. 6). Embora os objetos manipuláveis sejam comumente usados por professores da educação infantil, são menos utilizados por alunos mais velhos. No entanto, pesquisadores demonstraram o valor de iniciar a instrução no nível concreto, mesmo quando se trabalha com alunos do ensino fundamental II e do ensino médio (Butler et al., 2003; Witzel, Mercer & Miller, 2003; Gersten & Clarke, 2010).

Depois que os alunos demonstram compreensão dos conceitos usando representação concreta, eles podem progredir para o uso de representações visuais bidimensionais, como imagens, desenhos, retas numéricas, gráficos, diagramas e marcas de contagem para demonstrar conceitos matemáticos. Apresentações abstratas usando palavras e símbolos para transmitir conteúdo matemático são mais eficazes depois que os alunos desenvolvem a compreensão conceitual por meio de materiais manipuláveis e representação visual. Essa progressão é conhecida como Concreto-Representacional-Abstrato.

Figura 3.1 O Continuum Concreto-Pictórico-Abstrato

Concrete	Pictorial	Abstract
- Manipulatives - Act it out	- Pictures - Drawings - Diagrams - Number lines - Tally marks	- Words - Symbols
		$2 + 3$ $a + b$ 5^2 one half

(CRA) ou a sequência Concreto-Pictórico-Abstrato (CPA) (Peterson, Mercer e O'Shea, 1988; Sousa, 2007; Witzel, 2005). A Figura 3.1 mostra exemplos de representação concreta, pictórica e abstrata da matemática. Embora educadores matemáticos defendam há muito tempo a adoção do continuum CPA (por exemplo, ver Van de Walle et al., 2019), muitos materiais didáticos dependem quase exclusivamente da representação abstrata (Alkhateeb, 2019; Bryant et al., 2008; Hodges, Cady e Collins, 2008). Quando um distrito seleciona materiais que fornecem exemplos suficientes de representação concreta e pictórica, a compreensão de todos os alunos melhora.

Selecione programas de alta qualidade e implemente-os com fidelidade

As práticas descritas acima demonstraram melhorar o desempenho em ambientes de educação geral. No entanto, para que os alunos obtenham os mesmos resultados positivos obtidos nos estudos de pesquisa, cada componente do programa deve ser apresentado como foi concebido e apresentado quando os resultados do estudo de pesquisa foram coletados. Isso significa que o programa deve ser usado com alunos semelhantes aos que participaram do estudo. Se um programa foi eficaz com alunos com desempenho normal, não se pode presumir que o mesmo programa seria igualmente eficaz com alunos com desempenho abaixo do nível escolar. Além disso, cada distrito tem características demográficas únicas e nenhum programa atenderá às necessidades de todas as populações de alunos. Por exemplo, alunos que são temporários, vêm de origens socioeconômicas mais baixas, têm alguma deficiência ou não são falantes nativos da língua inglesa, correm maior risco de apresentar dificuldades acadêmicas. Um programa ideal para apoiar esses alunos pode não ser a melhor escolha para alunos de alto desempenho que não estejam enfrentando desafios semelhantes.

A aprendizagem é otimizada quando um distrito seleciona um currículo básico que atende às necessidades de aprendizagem da maioria de seus alunos. Quando o programa básico é efetivamente adaptado às necessidades de aprendizagem da maioria de seus alunos,

Para a população estudantil, cerca de 80% dos alunos devem atingir os padrões em testes estaduais de proficiência e outras medidas de triagem. Resultados abaixo do ideal podem ocorrer quando o currículo selecionado não é respaldado por pesquisas rigorosas, não é adequado à população escolar ou não é implementado com fidelidade. Se os dados de triagem indicarem que mais de 20% dos alunos de uma escola estão com dificuldades, é hora de reavaliar o currículo básico. As soluções incluem fornecer treinamento e suporte adicionais aos professores, aumentar a quantidade ou o tipo de diferenciação ou selecionar materiais diferentes para o currículo básico.

Para ajudar as escolas a encontrar programas de ensino de alta qualidade, diversas organizações mantêm um banco de dados que resume as pesquisas sobre materiais didáticos disponíveis comercialmente. O What Works Clearinghouse, uma divisão do Instituto de Ciências da Educação (IES) do Departamento de Educação, avalia o rigor das evidências sobre programas, práticas e produtos e fornece um resumo de suas descobertas que pode ajudar os educadores a tomar decisões informadas (WWC, <https://ies.ed.gov/ncee/wwc/Math/>). Para programas de matemática básica, cada revisão contém uma visão geral do programa, um resumo da pesquisa sobre o programa e uma declaração sobre sua eficácia. Outro site que fornece informações sobre a solidez das evidências que sustentam programas de matemática para o ensino fundamental e médio é a The Best Evidence Encyclopedia (www.bestevidence.org).

[org](#)). Este site, criado pelo Centro de Reforma Educacional Orientada por Dados da Escola de Educação da Universidade Johns Hopkins e financiado pelo Instituto de Ciências da Educação dos EUA O Departamento de Educação (Department of Education) fornece atualmente classificações para uma variedade de programas de matemática. Esses sites continuam atualizando suas recomendações para refletir os resultados de pesquisas em andamento.

Mesmo quando o currículo básico é bem adaptado à população estudantil e implementado com fidelidade, espera-se que até 20% dos alunos precisem de apoio adicional. Na próxima seção, descrevemos como o ensino deve ser diferenciado para esses alunos.

Intervenções para apoiar alunos com dificuldades Matemática (Níveis 2 e 3)

O termo “intervenção” é usado para descrever atividades instrucionais que fornecem suporte adicional para melhorar os resultados de alunos com dificuldades para dominar o currículo básico. Algumas recomendações para instrução durante as intervenções são semelhantes às práticas recomendadas para o currículo básico. No entanto, as melhores práticas durante as intervenções incluem algumas diferenças significativas que afetam tanto o que é ensinado quanto como é ensinado. As diferenças entre a instrução recomendada para a população em geral e as estratégias que apoiam alunos com dificuldades para dominar a matemática são resumidas em várias publicações do IES e de educadores renomados: (Baroody, Burchinal, Carver et al., 2013; Gersten et al., 2009; McLeskey et al., 2017; Powell e Fuchs, 2015; www.centeroninstruction.org). As recomendações para intervenções baseadas em evidências em matemática encontradas no Guia de Práticas estão listadas na [Figura 3.2](#).

Este livro baseia-se em recomendações de todas essas fontes. Apresentamos uma visão geral das recomendações abaixo e as exploramos com mais detalhes nos capítulos subsequentes.

Use instruções explícitas e sistemáticas

Para alunos com dificuldades em matemática, estudos mostram que a aprendizagem aumenta quando os professores utilizam instruções sistemáticas e explícitas (McLeskey et al., 2017). No Nível 1, os especialistas recomendam o uso de uma abordagem equilibrada que combine métodos de investigação e instruções explícitas, conforme discutido anteriormente. No entanto, como os alunos com dificuldades se beneficiam de uma abordagem mais abrangente

Figura 3.2 Recomendações do Guia de Práticas do IES: Auxiliando alunos com dificuldades em matemática: Resposta à intervenção (RtI) para escolas de ensino fundamental e médio

1. Screen all students to identify those at risk for potential mathematics difficulties and provide interventions to students identified as at risk.
2. Instructional materials for students receiving interventions should focus intensely on in-depth treatment of whole numbers in kindergarten through grade 5 and on rational numbers in grades 4 through 8. These materials should be selected by committee.
3. Instruction during the intervention should be explicit and systematic. This includes providing models of proficient problem solving, verbalization of thought processes, guided practice, corrective feedback, and frequent cumulative review.
4. Interventions should include instruction on solving word problems that is based on common underlying structures.
5. Intervention materials should include opportunities for students to work with visual representations of mathematical ideas and interventionists should be proficient in the use of visual representations of mathematical ideas.
6. Interventions at all grade levels should devote about 10 minutes in each session to building fluent retrieval of basic arithmetic facts.
7. Monitor the progress of students receiving supplemental instruction and other students who are at risk.
8. Include motivational strategies in tier 2 and tier 3 interventions.

Source: Gersten et al., 2009, p. 6.

uso de instrução explícita, o Conselho para Crianças Excepcionais, o Centro Nacional de Intervenção Intensiva, o Painel Consultivo Nacional de Matemática, as *Práticas de Alto Nível para Educação Especial*, o Guia de Práticas do What Works Clearinghouse e as *Práticas de Alta Alavancagem em Educação Especial* recomendam o uso de instrução explícita durante intervenções mais intensivas (Gersten et al., 2009; Jayanthi, Gersten & Baker, 2008; McLeskey et al., 2017, McLeskey et al., 2017; NMAP, 2008). Os alunos que recebem instrução básica devem experimentar alguma instrução explícita no Nível 1 antes de serem movidos para o Nível 2, mas em níveis mais altos, a instrução explícita deve ser o método de instrução predominante. Embora a instrução sistemática e explícita não seja uma estratégia matemática específica, pode ser o suporte mais importante que os intervencionistas podem fornecer. [O Capítulo 5](#) contém uma descrição detalhada de como usar instrução sistemática e explícita para apoiar alunos com dificuldades em matemática.

Use representações visuais

Alunos com dificuldades em matemática têm dificuldade em compreender símbolos abstratos (Hecht, Vogt e Torgesen, 2007; van Garderen, Scheuermann, Poch e Murray, 2018). Para desenvolver a compreensão conceitual, eles precisam primeiro vivenciar conceitos matemáticos, dramatizando problemas ou usando materiais manipuláveis para demonstrá-los. Depois de dominar uma habilidade com materiais manipuláveis, os alunos estão prontos para usar representações bidimensionais, como imagens, marcas de contagem ou representações gráficas, para ajudar a resolver problemas. Por fim, passam para a fase abstrata e abandonam a representação concreta e pictórica, passando a depender de números e símbolos para resolver problemas.

Como discutimos anteriormente, todos os alunos se beneficiam quando a instrução segue o continuum da ACP, mas isso é crucial durante as intervenções. Infelizmente, estudos mostram que os livros didáticos tradicionais não fornecem modelos concretos e pictóricos adequados para problemas matemáticos, baseando-se principalmente em palavras e símbolos abstratos (Alkhateeb, 2019; Bryant et al., 2008; Hodges, Cady e Collins, 2008). Enquanto os alunos talentosos em matemática

Embora alunos com deficiências ou com dificuldades em matemática possam dominar novos conceitos, habilidades e procedimentos com representação visual e concreta mínima, a omissão dessas atividades fundamentais pode ser devastadora para alunos que necessitam de intervenções matemáticas. Além disso, as recomendações para o ritmo de instrução para alunos com dificuldades em matemática diferem das recomendações para a instrução de Nível 1 (básico). Vários estudos demonstraram que alunos com deficiência ou com dificuldades em matemática normalmente precisam de cerca de três aulas no nível concreto, cada uma consistindo de aproximadamente 20 problemas, antes de estarem prontos para o suporte concreto, e depois três aulas de 20 problemas no nível pictórico antes de desenvolverem a compreensão conceitual e estarem prontos para trabalhar apenas com palavras e símbolos abstratos (por exemplo, ver Butler, Miller, Crehan, Babbitt e Pierce, 2003; Mercer e Miller, 1992; Harris, Strawser, Jones e Mercer, 1998). Mesmo quando os materiais elaborados para o ensino básico incluem representações concretas e pictóricas, raramente dedicam tempo suficiente a cada nível antes de abandonar essas representações visuais e esperar que os alunos trabalhem exclusivamente no nível abstrato.

Alunos com dificuldades em matemática também precisam ter a relação entre as representações concretas, pictóricas e abstratas explicitamente demonstrada. O Guia de Práticas do IES afirma: “Recomendamos que os intervencionistas vinculem explicitamente a representação visual às representações simbólicas padrão usadas em matemática” (Gersten et al., 2009, p. 31). Em outras palavras, os professores devem ensinar explicitamente conceitos e operações no nível concreto e, em seguida, repetir a instrução usando a mesma linguagem e estratégias procedimentais nos níveis pictórico e abstrato, para que os alunos percebam claramente a relação entre as diversas formas de representação.

Essas recomendações se aplicam a todos os níveis de ensino, pois a sequência CPA demonstrou ser eficaz tanto para alunos do ensino fundamental quanto do ensino médio. No [Capítulo 6](#), discutimos o contínuo CPA com mais detalhes. Nos [Capítulos 7 e 8](#), apresentamos ideias sobre como usar o contínuo CPA para desenvolver a compreensão conceitual de números inteiros e, no [Capítulo 10](#), aplicamos a sequência a números racionais.

Concentre-se intensamente em números inteiros e números racionais

Na sala de aula de educação geral, o currículo básico aborda toda a gama de conteúdos matemáticos, incluindo noção de números e operações, álgebra, geometria, medição, análise de dados e probabilidade. Em resposta às preocupações com o escopo de nossos currículos, os educadores têm tentado limitar a gama de tópicos abordados a cada ano, incentivando as escolas a darem mais ênfase à abordagem aprofundada de conceitos e habilidades fundamentais.

Concentrar-se na cobertura aprofundada do conteúdo fundamental é ainda mais importante para alunos com dificuldades em matemática. O Guia de Práticas do IES recomenda: “Os materiais didáticos para alunos que recebem intervenções devem se concentrar intensamente no tratamento aprofundado de números inteiros do jardim de infância ao quinto ano e em números racionais do quarto ao oitavo ano” (Gersten et al., 2009). Isso significa que, nas séries iniciais, as intervenções oferecidas aos alunos que recebem apoio dos Níveis 2 e 3 devem enfatizar contagem, valor numérico, valor posicional e operações com números inteiros. Tópicos como geometria, medição e análise de dados são importantes, mas a maioria dos alunos que recebem intervenções também participa do ensino do Nível 1 e, portanto, será exposta a esse conteúdo durante o ensino básico. Como a compreensão de números inteiros e racionais constitui a base para todas as outras disciplinas matemáticas, recomenda-se que o tempo de intervenção se concentre nesses conceitos fundamentais. Discutiremos estratégias para desenvolver proficiência com números inteiros nos [Capítulos 7, 8 e 9](#). Uma vez que os alunos tenham dominado esse conteúdo, o foco deve mudar para os números racionais, incluindo a compreensão do significado de frações, decimais,

razões e porcentagens, e operações com números racionais. No [Capítulo 10](#), discutiremos intervenções para desenvolver proficiência com números racionais. Devido ao seu foco intenso em habilidades fundamentais, o ensino dos Níveis 2 e 3 não necessariamente se alinhará ao conteúdo apresentado na sala de aula regular. No entanto, como o ensino dos Níveis 2 é oferecido em complemento ao ensino do Nível 1, os alunos que recebem apoio em níveis ainda serão expostos ao conteúdo adicional quando estiverem na sala de aula regular.

Desenvolver a recuperação fluente de fatos básicos

Todos os alunos devem dominar fatos matemáticos básicos envolvendo adição, subtração, multiplicação e divisão. O domínio exige que os alunos primeiro desenvolvam uma compreensão conceitual do significado das operações. Em seguida, os alunos precisam se tornar proficientes em estratégias computacionais para resolver problemas de fatos básicos. Por fim, precisam desenvolver a automaticidade com fatos básicos. Assim como bons leitores vão além da mera soletração de palavras e, em vez disso, são capazes de reconhecer automaticamente o vocabulário básico, alunos de matemática bem-sucedidos reconhecem automaticamente fatos matemáticos básicos. Uma vez que os alunos conseguem calcular fluentemente, eles são capazes de direcionar sua energia cognitiva para tarefas mais complexas. Alunos que não conseguem identificar fatos básicos de forma rápida e fácil devem dedicar grande parte de sua memória de trabalho à computação, o que limita sua capacidade de se concentrar em outros aspectos da instrução. Por exemplo, um aluno pode estar assistindo a uma demonstração sobre como reagrupar ao resolver um problema de subtração de vários dígitos, mas se o aluno não for capaz de resolver fatos básicos de subtração automaticamente, ele ou ela pode ter que concentrar tanta energia na computação básica que as novas informações sobre reagrupamento seriam perdidas.

A pesquisa mostrou que a automaticidade com fatos básicos prevê o desempenho em testes de matemática geral (Stickney, Sharp e Kenyon, 2012) e que os alunos que têm dificuldades em matemática geralmente não têm automaticidade com fatos básicos (Baker e Cuevas, 2018; Gersten et al., 2009). Portanto, o Guia de Práticas do IES recomenda: “Intervenções em todos os níveis de ensino devem dedicar cerca de dez minutos em cada sessão para desenvolver a fluência na memorização de fatos aritméticos básicos” (Gersten et al., 2009). Descrevemos estratégias para desenvolver a fluência em fatos no [Capítulo 9](#).

Ensine os alunos a usar estruturas subjacentes para resolver problemas de palavras

O objetivo de aprender matemática é ser capaz de aplicar esse conhecimento para resolver problemas da vida real. O Conselho Nacional de Professores de Matemática (NCTM), o NMAP (2008) e os Padrões Estaduais Básicos Comuns para Matemática (CCSSM, 2010) identificam a resolução de problemas como um dos principais componentes de um programa de matemática básica eficaz. Infelizmente, os alunos que têm dificuldades com a matemática têm demonstrado extrema dificuldade em resolver problemas matemáticos (Gersten et al., 2009; Pfannenstiel, Bryant, Bryant e Porterfield, 2015; Jitendra e outros, 2015; Stevens e Powell, 2016).

Os programas de matemática projetados para uso como currículo básico no ambiente de educação geral frequentemente ensinam a resolução de problemas usando uma variação do processo de quatro etapas de Polya (1945): (1) entender o problema; (2) elaborar um plano; (3) executar o plano; (4) olhar para trás e refletir. Embora essas sejam boas etapas gerais, os alunos com dificuldades em matemática frequentemente ficam presos na primeira etapa e, portanto, têm dificuldade em elaborar um plano para resolver o problema. Oferecer a eles um plano passo a passo mais detalhado para a resolução de problemas pode melhorar o desempenho (ver, por exemplo, Dennis, 2015; Fuchs, Powell, Cirino, Schumacher, Marrin, Hamlett e Changas, 2014; Powell e Fuchs, 2018).

Um sólido conjunto de evidências demonstra que ensinar os alunos a usar estruturas subjacentes para compreender problemas e desenvolver uma estratégia de solução pode produzir uma melhoria significativa no desempenho desses alunos na resolução de problemas. Ao se concentrarem nas estruturas subjacentes, os alunos primeiro aprendem a reconhecer padrões de problemas e, em seguida, a organizar as informações do problema no diagrama esquemático apropriado. Em seguida, os alunos aprendem uma estratégia para resolver cada tipo de problema. Como a eficácia do uso de estruturas subjacentes para ensinar a resolução de problemas está bem documentada (ver, por exemplo, AMTE, 2017; Baroody et al, 2013; Woodward et al., 2012), é uma abordagem benéfica para uso em todos os níveis. É fundamental para alunos que precisam de suporte adicional. O Guia de Prática do IES recomenda: "As intervenções devem incluir instruções sobre a resolução de problemas verbais baseadas em estruturas subjacentes comuns" (Gersten et al., 2009). No [Capítulo 12](#), fornecemos explicações detalhadas e exemplos de como usar estruturas subjacentes para ensinar a resolução de problemas.

Incluir estratégias motivacionais

Alunos com dificuldades em matemática frequentemente apresentam problemas de processamento, deficiências cognitivas, problemas de recuperação ou armazenamento de memória, déficits de atenção e outros problemas que dificultam a concentração na instrução ou a conclusão de tarefas. Além disso, muitos já experimentaram fracasso ou frustração ao tentar resolver tarefas matemáticas no passado e, por isso, agora abordam a matemática com receio. Portanto, intervenções eficazes devem abordar a motivação do aluno. Embora uma discussão sobre motivação possa parecer inadequada em um livro de matemática, estudos de pesquisa demonstram que o uso planejado de estratégias motivacionais tem um impacto maior do que a escolha do livro didático ou o uso da tecnologia para melhorar os resultados da aprendizagem (ver, por exemplo, Epstein et al., 2008; Fuchs et al., 2005; Marzano, Pickering & Pollack, 2001). Por esse motivo, o Guia de Práticas do IES recomenda que estratégias motivacionais sejam incluídas em todas as intervenções de Nível 2 e Nível 3 (Gersten et al., 2009). Como a motivação é um pré-requisito para todo aprendizado, começamos nossa discussão sobre intervenções abordando a motivação no [Capítulo 4](#).

Intensificar a instrução

Muitas editoras oferecem programas de matemática que, segundo elas, são projetados para uso em intervenções de Nível 2. Alguns deles são "programas validados", o que significa que "há evidências positivas, coletadas durante pelo menos um ensaio clínico randomizado bem conduzido, de que o programa melhora os resultados em matemática de alunos com deficiências matemáticas (DM) em uma intervenção de Nível 2" (Powell & Fuchs, 2015, p. 183). Se um programa for validado, ele é apropriado para uso durante intervenções de Nível 2. O Centro Nacional de Intervenção Intensiva fornece um Quadro de Ferramentas de Intervenção Acadêmica (disponível online em www.intensiveintervention.org) que resume estudos de eficácia de programas de intervenção em matemática. Este quadro pode ajudar educadores a encontrar materiais de intervenção eficazes.

No entanto, muitos professores que oferecem suporte de Nível 2 não têm acesso a um programa validado que atenda às necessidades de seus alunos (Powell & Fuchs, 2015). Quando os materiais disponíveis não são projetados especificamente para alunos com deficiência em matemática, os intervencionistas precisarão fazer adaptações para intensificá-los. "Intensificar a instrução" significa adaptar o programa existente para atender de forma mais eficaz às necessidades específicas do aluno. Se um intervencionista não tiver acesso a um programa validado, os recursos disponíveis devem ser intensificados para incorporar intervenções de Nível 2 apropriadas. O Centro Nacional de Intervenções Intensivas fornece uma Taxonomia de Intervenções que oferece assistência na intensificação da instrução (<https://intensiveintervention.org/taxonomy-intervention-intensity>).

Alunos que precisam de suporte adicional além do Nível 2 podem receber “suporte individualizado” no Nível 3. Nesse contexto, o termo “individualizado” não significa que a instrução deva ser fornecida individualmente. O termo “instrução individualizada” ou “instrução especialmente projetada” significa que os objetivos e métodos de ensino são individualizados para atender às necessidades específicas do aluno. Em outras palavras, a instrução fornecida no Nível 2 deve ser ainda mais intensificada. Se um programa validado foi fornecido no Nível 2, as intervenções do Nível 3 podem ser desenvolvidas com base no programa existente. Se um programa validado não foi utilizado no Nível 2, os professores devem intensificar ainda mais os materiais para desenvolver intervenções individualizadas eficazes no Nível 3 (McInerney, Zumeta, Gandhi e Gersten, 2014). Discutiremos métodos para intensificar a instrução ao longo deste livro. Recursos adicionais para ajudar os intervencionistas a atender às necessidades de seus alunos incluem o módulo IRIS, “Intervenção intensiva parte 1: usando individualização baseada em dados para intensificar a instrução” (<https://iris.peabody.vanderbilt.edu/module/dbi1/>) e o site do National Center on Intensive Intervention (<https://intensiveintervention.org/>), que fornecem recomendações para intensificar a instrução em todas as áreas de conteúdo.

Neste capítulo, descrevemos seis práticas baseadas em evidências para apoiar alunos com dificuldades em matemática. Se os materiais disponíveis não incluem essas práticas, o primeiro passo para intensificar o ensino é adicionar uma ou mais das práticas descritas acima. Por exemplo, expandir o uso de representação visual seria uma maneira de intensificar o ensino. Pesquisas abundantes sugerem que alunos com dificuldades em matemática se beneficiam de instruções sistemáticas e explícitas; portanto, se os materiais disponíveis não utilizarem instruções sistemáticas e explícitas, tornar a aula mais explícita seria uma maneira eficaz de intensificar o ensino. O instrutor pode dividir os objetivos em partes menores, adicionar atividades de revisão ativa antes de introduzir novos conteúdos, modelar procedimentos, fornecer exemplos adicionais ou expandir as atividades de prática guiada. Forneceremos uma descrição detalhada dos elementos da instrução sistemática e explícita no [Capítulo 5](#). Aumentar as estratégias motivacionais é outra maneira de intensificar o ensino. Discutiremos a motivação no [Capítulo 4](#). Concentrar o ensino em conteúdos fundamentais, como números inteiros e racionais, fatos básicos e resolução de problemas, seria outra maneira de intensificar o ensino. Descreveremos ideias adicionais para intensificar a instrução nos capítulos subsequentes.

Resumo

Para que as crianças americanas se tornem proficientes em matemática, elas precisam de instrução de alta qualidade. O currículo básico fornecido a todos os alunos da sala de aula do ensino regular (Nível 1) deve usar materiais e abordagens instrucionais que tenham sido validados por meio de rigorosos estudos científicos e considerados eficazes com a população do ensino regular. Pesquisas sobre abordagens eficazes para o ensino da matemática continuam a surgir, mas já foram identificadas diversas práticas baseadas em evidências que podem orientar a tomada de decisões instrucionais. O currículo básico de matemática deve ser simplificado para enfatizar conceitos críticos, estabelecer parâmetros claros que especifiquem o nível em que os alunos devem dominar cada conceito e enfatizar a compreensão conceitual, a fluência computacional e procedural e as habilidades de resolução de problemas. Ao selecionar programas de matemática para usar em seu currículo básico (Nível 1), os distritos precisarão se concentrar em materiais que estejam alinhados com seus padrões estaduais e sigam essas diretrizes baseadas em pesquisas, e que tenham se mostrado eficazes com alunos semelhantes aos das salas de aula do ensino regular do distrito.

Diretrizes adicionais se aplicam a alunos que precisam de suporte de Nível 2 ou Nível 3. Embora os alunos com dificuldades sejam expostos ao currículo básico completo na sala de aula de educação geral, as intervenções que recebem por meio do suporte de Nível 2 e Nível 3 devem se concentrar intensamente

sobre os conceitos e habilidades fundamentais mais críticos. Estes incluem números inteiros e racionais, fluência computacional com fatos básicos e resolução de problemas. Embora todos os alunos se beneficiem quando os conceitos são introduzidos por meio de representação concreta e visual, isso é fundamental para alunos com dificuldades em matemática. Além disso, resultados de pesquisas mostram consistentemente que alunos com dificuldades em matemática se beneficiam de instruções sistemáticas e explícitas e outras estratégias que intensificam o ensino. Ao selecionar materiais para uso em intervenções de Nível 2 e 3, os distritos precisam selecionar programas validados e baseados em evidências que tenham se mostrado eficazes para alunos que necessitam de intervenções em matemática. Embora design instrucional e motivação não sejam tópicos exclusivos da matemática, o sólido conjunto de evidências que sustentam essas estratégias levou o What Works Clearinghouse a incluí-las em suas recomendações para apoiar alunos em matemática do ensino fundamental e médio (Gersten et al., 2009). Por isso, nos concentraremos nessas estratégias nos próximos dois capítulos. Nos [Capítulos 6 a 11](#), discutiremos como incorporar outras recomendações baseadas em evidências ao fornecer intervenções para números inteiros, números racionais e resolução de problemas.

5

Instrução explícita

Alunos com dificuldades em matemática apresentam uma variedade de características de aprendizagem que afetam sua resposta à instrução. Dentre os diversos modelos de ensino utilizados por professores, pesquisas demonstram que a instrução explícita é a mais eficaz com esses alunos (Gersten et al., 2009; McLeskey et al., 2017). Neste capítulo, examinaremos primeiro considerações importantes sobre o ensino para alunos que não estão progredindo adequadamente, depois descreveremos os elementos essenciais da instrução explícita que ajudam a atender às necessidades desses alunos e, por fim, discutiremos como a instrução explícita melhora a motivação dos alunos.

Considerações instrucionais para alunos com dificuldades

Alunos que não conseguem progredir adequadamente em matemática frequentemente apresentam problemas de memória e função executiva (Allsopp et al., 2010; Kleszczewski, Brandenburg, Fischbach et al., 2018; Mabbott & Besanz, 2008; Mazzocco, 2007; Swanson, Jermant & Zheng, 2009). A memória de trabalho é o processamento consciente de informações que nos permite reter pequenas quantidades de informação na consciência por um curto período de tempo. Ela nos permite integrar informações perceptuais com o conhecimento armazenado na memória de longo prazo. Por exemplo, quando um aluno é solicitado a somar mentalmente os números $3 + 5 + 7$, ele deve processar o que a questão está pedindo, reter os três numerais na memória de trabalho enquanto utiliza seu conhecimento armazenado do processo de adição e seu conhecimento de fatos básicos de adição, e usar todas essas informações para obter uma soma parcial ($3 + 5 = 8$) antes de calcular $8 + 7$ para obter a resposta final de 15. O adulto médio pode reter cerca de sete itens na memória de trabalho (mais ou menos dois) por cerca de dezoito segundos (GA Miller, 1956). Você pode tentar fazer isso sozinho com um teste rápido. Passe cerca de um segundo por dígito memorizando a seguinte lista de sete números. Depois, desvie o olhar e anote-os, em ordem, de memória:

2 5 1 8 3 4 9

Se você tem uma capacidade de memória média, provavelmente se lembra de todos os sete, porque $7 + 2$ é a capacidade típica de indivíduos com 15 anos ou mais (GA Miller, 1956). As crianças têm uma

capacidade muito mais limitada, que aumenta gradualmente à medida que amadurecem. Uma criança média de cinco anos consegue se lembrar de cerca de dois itens. Uma criança de sete anos normalmente consegue reter três itens, e uma de nove anos, quatro. Aos 11 anos, a retenção aumenta para cerca de cinco itens, e aos 13 anos, o indivíduo médio consegue se lembrar de cerca de seis (Pascual-Leone, 1970).

Indivíduos com dificuldades em matemática geralmente têm menos memória de trabalho do que seus colegas com desempenho normal (Chen, Lian, Yang et al., 2017; Fanari & Massidda, 2018; Justicia-Galiano & Martin-Puga, 2017; Lee & Bull, 2016). Nas salas de aula diversificadas de hoje, a capacidade de memória de trabalho dos alunos pode variar de apenas dois a até nove itens. Além disso, o tempo que esses itens podem permanecer na consciência varia muito entre os alunos, criando um desafio para os professores. Para que alunos com memória de trabalho limitada tenham sucesso, as informações devem ser introduzidas em pequenos blocos, seguidos de prática suficiente para que as informações sejam armazenadas na memória de longo prazo antes que outro pequeno bloco de informação seja introduzido. Infelizmente, em muitas escolas, o currículo padrão incentiva os professores a apresentar tarefas complexas de resolução de problemas e a avançar pelo conteúdo em um ritmo acelerado, sob a suposição equivocada de que tal abordagem oferecerá enriquecimento para alguns alunos, ao mesmo tempo que permitirá que todos dominem as informações básicas. Mas veja o que acontece quando pedimos aos alunos que abordem muita informação de uma só vez. Teste sua memória como fez antes, mas, desta vez, tente uma lista de 11 dígitos. Gaste cerca de um segundo por dígito memorizando a seguinte lista de números, depois desvie o olhar e anote-os, em ordem, de memória:

8 4 9 7 26593 1 7

Como você se saiu? Se você for como a maioria das pessoas, provavelmente não se saiu tão bem nesta lista quanto na lista de sete itens. Quando tentamos sobrecarregar a memória de trabalho, o resultado é semelhante ao que acontece quando um computador fica sobrecarregado e tudo o que você pode fazer é pressionar "control-alt-delete". Os educadores às vezes presumem que, se avançarem e abordarem mais informações, os alunos reterão o básico e apenas o excesso será esquecido. Na realidade, quando sobrecarregamos a memória de trabalho, os alunos normalmente retêm menos informações do que se tivéssemos introduzido uma quantidade limitada de informações. Em outras palavras, menos pode ser mais. Abordagens de ensino que introduzem uma pequena quantidade de informações e, em seguida, dão tempo para os alunos processarem ativamente essas informações antes de introduzir informações adicionais, serão mais bem-sucedidas com alunos com dificuldades para dominar a matemática. Se uma criança média de 11 anos consegue reter cinco itens na memória de trabalho, os professores que trabalham com essa faixa etária podem planejar apresentar um problema que exija que os alunos retenham cinco itens na memória de trabalho simultaneamente. Se a turma também tiver alunos com déficits de memória, esses alunos precisarão de problemas mais simples, com oportunidades mais frequentes de revisão e prática.

Além dos déficits na memória de trabalho, alunos com dificuldades em matemática também podem apresentar déficits na memória de longo prazo (Geary, 2003). De acordo com o dicionário APA, a memória de longo prazo é "um sistema de armazenamento de informações relativamente permanente que permite reter, recuperar e utilizar habilidades e conhecimentos horas, semanas ou até anos após terem sido originalmente aprendidos". Para serem retidas, as novas informações são vinculadas às informações existentes na memória de longo prazo. Alguns indivíduos conseguem formar conexões rapidamente e reter novas informações com o mínimo de repetição, enquanto outros têm dificuldade para conectar novas informações ao conhecimento prévio ou precisam de muito mais repetições antes que as novas informações sejam armazenadas com sucesso na memória de longo prazo. Em uma sala de aula típica, alguns alunos fazem conexões rapidamente por conta própria e aprendem rapidamente novos conteúdos, enquanto o

precisam de ajuda para formar conexões e podem precisar de muito mais prática antes que o novo conteúdo seja totalmente retido. Para todos os alunos, o uso de estratégias de ensino que os ajudem a conectar o novo conteúdo ao conhecimento prévio melhorará a retenção. Para alunos com déficits de memória, tornar essas conexões explícitas é ainda mais essencial. Além disso, alunos que precisam de mais tempo de ensaio para consolidar o aprendizado se beneficiarão de um ritmo mais lento e prática adicional. Introduzir novo conteúdo muito cedo interrompe a consolidação do aprendizado anterior (Wolfe, 2010).

Indivíduos que têm dificuldade com associações e formatos organizacionais também podem ter dificuldade em recuperar conteúdo armazenado anteriormente. Isso pode explicar por que alunos com dificuldades de aprendizagem muitas vezes parecem saber algo em um dia, mas esquecem no dia seguinte. Começar uma aula revisando cuidadosamente informações contextuais relevantes ajudará esses indivíduos a conectar novas informações ao aprendizado anterior e, assim, melhorar a retenção das informações a longo prazo. informação.

Vários estudos demonstraram que alunos com dificuldades de aprendizagem em matemática, especialmente aqueles com dificuldades de aprendizagem, também têm menos consciência de sua própria cognição do que seus colegas com desempenho normal (Bishara & Kaplan, 2018; Montague, 2006; Toraman, Orakci, & Aktan, 2020). Eles têm menos probabilidade de reconhecer se compreenderam completamente as instruções ou de perceber se suas respostas fazem sentido, portanto, são menos propensos a pedir ajuda ou esclarecimentos quando apropriado. Como resultado, o professor deve assumir um papel mais ativo para garantir que esses alunos tenham compreendido completamente a lição. Por exemplo, o professor pode pedir aos alunos que expliquem a lição com suas próprias palavras ou demonstrem a habilidade enquanto o professor observa. Alunos com dificuldades em metacognição também terão dificuldade em selecionar uma estratégia apropriada ou em seguir a estratégia depois de selecionada. Métodos de ensino que apresentam múltiplas estratégias podem ser confusos para esses alunos. Eles se beneficiam de instruções sistemáticas, onde conseguem explorar uma estratégia e dominá-la antes de serem expostos a métodos alternativos (McLeskey et al., 2017). Múltiplas etapas Problemas também representam um desafio especial, pois os alunos podem perder a noção de onde estão, resultando em erros frequentes (Wong, Harris, Graham e Butler, 2003). Portanto, alunos com déficits de autorregulação se beneficiarão de instruções que incluam modelagem explícita de estratégias e múltiplas oportunidades de prática, com o apoio gradualmente desaparecendo à medida que os alunos adquirem competência.

Dificuldades no processamento da linguagem têm um efeito profundo na capacidade dos alunos de se beneficiarem da instrução. Em vez de concentrar sua atenção na matemática que está sendo introduzida, alunos com déficits de linguagem precisam usar a memória de trabalho para processar a linguagem, reduzindo assim a capacidade disponível para o raciocínio matemático. Por exemplo, esses alunos podem ter dificuldade em compreender o vocabulário matemático (por exemplo, fator, expoente, denominador, variável) enquanto ouvem instruções, participam de discussões em grupo ou leem e compreendem problemas de palavras. Alunos para os quais o inglês é a segunda língua ou outros com vocabulário reduzido sofrerão problemas semelhantes durante a instrução. Esses alunos se beneficiam de uma instrução focada, na qual apenas uma quantidade limitada de informações é introduzida de cada vez, o vocabulário é discutido explicitamente e os professores verificam frequentemente a compreensão (Powell & Fuchs, 2018).

Por fim, alunos com baixo desempenho no passado podem ter medo de matemática e começar a se considerar fracassados em matemática (Gersten et al., 2009; Justicia-Galiano & Martin-Puga, 2017). Pesquisas indicam que alunos com sucesso no passado persistirão, mesmo que consigam responder corretamente apenas cerca de 75% das vezes. Em contraste, alunos sem histórico de sucesso precisam que a instrução seja dividida em etapas menores, nas quais consigam responder corretamente 95% a 99% das vezes, para se manterem.

engajados (Hunter, 2004). Instruções explícitas, que dividem a instrução em pequenas etapas, podem ajudar a desenvolver um senso de autoeficácia que, eventualmente, permitirá que esses alunos tentem resolver problemas mais complexos e desafiadores.

A Lição de Instrução Explícita

A instrução explícita é o método de ensino recomendado para alunos com dificuldades em matemática (Gersten et al., 2010; McLeskey et al., 2017; NMAP, 2008). Nesta seção, descrevemos os principais componentes da instrução explícita: objetivos de ensino, introdução à aula, revisão de habilidades e conceitos pré-requisitos, apresentação de novos conteúdos, prática guiada, prática independente e encerramento da aula. [A Figura 5.1](#) fornece um resumo dos elementos essenciais da instrução explícita e pode ser usada como referência à medida que exploramos cada componente.

Objetivos Instrucionais

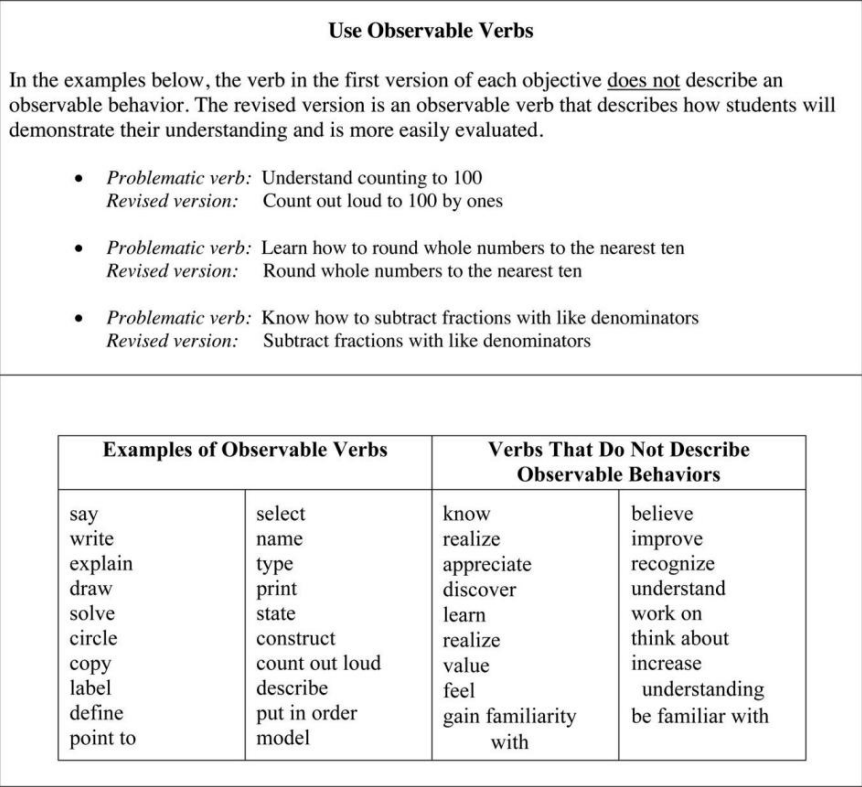
A instrução explícita começa na fase de planejamento com um objetivo instrucional claramente definido que descreve resultados de aprendizagem observáveis. Ter uma visão clara do que os alunos aprenderão e como demonstrarão essa aprendizagem permite aos professores monitorar a eficácia da aula e esclarecer ou reensinar quando necessário.

Objetivos eficazes contêm verbos que descrevem comportamentos observáveis que especificam como os alunos demonstrarão sua compreensão. Muitos planos de aula publicados contêm objetivos que afirmam que os alunos "entenderão" o conteúdo apresentado, mas

Figura 5.1 Resumo de uma lição explícita

Lesson Introduction • Engage Make lesson meaningful by providing a real-life example that shows how the skill or concept is used. • Review Prerequisite Skills & Concepts Provide opportunity for each student to <u>actively practice</u> any previously mastered skills and concepts necessary for success in this lesson.
Presentation of New Content • Explicitly model strategies and procedures. • Use think-alouds' to describe procedures and the rationale behind them. • Provide multiple examples. • Actively engage students by using multiple modalities and active student participation.
Guided Practice • Have students work with you to perform the same skill you just modeled. Nothing new is added here. • Use a practice format that allows <u>every</u> student to actively demonstrate the skill or concept introduced in the lesson. • Monitor each student and provide immediate feedback. • Have students explain what they are doing and why they are doing it that way. • Provides scaffolded support (i.e. gradually fade prompts as students gain proficiency). • Verify that each student understands the material before <u>assigning independent practice</u>.
Independent Practice • Have students practice the same skill or concept that has just been introduced. (Nothing new is added here.) • Interleave worked examples with problems students work themselves.
Lesson Closure • Have <u>students</u> summarize the main points of the lesson. • Preview next steps.

Figura 5.2 Selecionando verbos eficazes



Não especifique como essa compreensão será demonstrada ou avaliada. Como o professor não consegue enxergar dentro da cabeça do aluno e não consegue avaliar o que ele entende, sabe, acredita ou percebe, é melhor evitar tais verbos. Objetivos que especificam que o aluno explicará, construirá ou modelará o conceito podem ser facilmente avaliados. Por exemplo, um objetivo que afirma que o aluno "melhorará a compreensão da multiplicação de dois dígitos" é menos preciso do que um objetivo que especifica que o aluno "multiplicará corretamente dois números de dois dígitos onde o reagrupamento for necessário".

Da mesma forma, um objetivo que diz que o aluno "ganhará familiaridade com metades, terços e quartos" é mais difícil de avaliar do que um objetivo que especifica que o aluno "modelará corretamente ½, ⅓ ou ¼ de um todo ou conjunto". A Figura 5.2 fornece exemplos de verbos eficazes e ineficazes.

Objetivos eficazes não descrevem atividades instrucionais, mas sim os resultados da instrução. A aprendizagem pode ocorrer por meio de uma variedade de atividades instrucionais, e um professor eficaz alternará métodos, explicará o conceito de forma diferente ou oferecerá uma atividade diferente quando o que foi planejado não estiver funcionando. No entanto, o resultado de aprendizagem pretendido não é alterado por esse ajuste nos métodos. Por exemplo, "Os alunos jogarão um jogo para revisar a contagem por pulos" é uma descrição de uma atividade instrucional, não de um resultado de aprendizagem. Revisar o objetivo para "Os alunos contarão até 100 de 2 em 2, de 5 em 5 e de 10 em 10" fornece uma descrição muito mais clara do resultado de aprendizagem pretendido. Este objetivo permaneceria inalterado independentemente de os alunos jogarem um jogo, preencherem uma planilha ou usarem uma atividade no computador. A Figura 5.3 fornece exemplos adicionais de revisão de objetivos para especificar claramente o que os alunos aprenderão.

Figura 5.3 Objetivos eficazes descrevem resultados de aprendizagem

Effective Objectives Describe Learning Outcomes	
In the examples below, the first version describes an instructional activity. The revised objective is preferred because it specifies the learning outcome.	
• <i>Problematic objective:</i>	Read word problems with a partner and decide which information is needed to solve the problems
• <i>Revised objective:</i>	Given word problems that contain extraneous information, students will identify which information is needed to solve the problem.
• <i>Problematic objective:</i>	Complete the review sheet on page 32
• <i>Revised objective:</i>	Solve single-digit addition problems, sum ≤ 18
• <i>Problematic objective:</i>	Practice using base ten blocks to model numbers to 1000
• <i>Revised objective:</i>	Given a number less than 1000, model it with base ten blocks

Objetivos instrucionais eficazes descrevem os comportamentos que demonstram aprendizagem e, assim, ajudam os professores a monitorar a compreensão dos alunos e fazer os ajustes necessários em seus métodos de instrução sem alterar o objetivo instrucional.

Objetivo da lição

Envolver

Nossos corpos são biologicamente programados para prestar atenção e lembrar de informações significativas. Quando os alunos percebem uma lição como tendo relevância pessoal, eles serão aprendizes mais atentos e eficientes (Archer & Hughes, 2011; Wolfe, 2010). Portanto, a primeira tarefa do professor é envolver os alunos. Os alunos querem saber: "Por que temos que aprender isso?" Em matemática, independentemente do método de ensino utilizado, tornar a informação significativa e relevante significa que novas habilidades e conceitos devem ser introduzidos no contexto da resolução de problemas da vida real (NCTM, 2000). Por exemplo, alunos interessados em beisebol ficarão mais engajados se o processo de encontrar médias for introduzido pelo cálculo de médias de rebatidas; alunos que gostam de cozinhar podem entender frações melhor quando elas são apresentadas como um problema sobre medir ingredientes. Começar uma lição sobre divisão usando divisores de dois dígitos dizendo "Hoje vamos aprender sobre divisão" é muito menos envolvente do que começar com um problema da vida real como o seguinte:

As férias de primavera estão chegando, e nossa família vai viajar de carro para a Flórida. Estou tentando calcular quanto custará essa viagem, e uma grande despesa será a gasolina. Procurei no Google Maps e descobri que são 1.498 quilômetros daqui até nosso destino. Meu carro pode rodar 45 quilômetros com um galão de gasolina. Você pode me ajudar a calcular quantos galões de gasolina usarei para dirigir daqui até a Flórida?

Infelizmente, a maioria dos livros didáticos não introduz procedimentos matemáticos no contexto da resolução significativa de problemas. Uma revisão de aulas de frações em livros didáticos do ensino fundamental constatou que menos de 10% das aulas apresentavam novos conceitos de frações de forma significativa.

contexto completo (Hodges, Cady e Collins, 2008). Portanto, os professores são frequentemente forçados a desenvolver seus próprios exemplos para tornar o conteúdo significativo. Quando os distritos adotam novos livros didáticos, selecionar materiais que introduzam novos conteúdos no contexto da resolução de problemas da vida real pode impulsionar o desempenho dos alunos.

Revisão de habilidades e conceitos pré-requisitos

Para aproveitar a lição atual, os alunos geralmente precisam dominar habilidades e conceitos pré-requisitos. Por exemplo, antes que os alunos aprendam a reagrupar na subtração, eles já devem ser capazes de subtrair sem reagrupar e entender o valor posicional. Antes de contar de 5 em 5, os alunos devem ser capazes de contar de 1 em 1. Antes de aprender a somar moedas, eles precisam reconhecê-las, saber seu valor e ser capazes de somar. Portanto, ao planejar uma nova lição, é essencial que o professor faça uma lista abrangente de todos os conhecimentos pré-requisitos que os alunos precisariam para ter sucesso nessa lição e verifique sistematicamente para garantir que *cada* aluno do grupo tenha o conhecimento prévio necessário antes da introdução do novo conteúdo. Este é o princípio da instrução sistemática, que foi rotulada como uma prática de alto impacto para alunos com dificuldades acadêmicas (McLeskey et al., 2017). O objetivo de uma aula eficaz deve estar dentro da "zona de desenvolvimento proximal" de Vygotsky (Vygotsky, 1978), aquela pequena área logo além do nível atual de desempenho do aluno, mas acessível quando apresentada com apoio orientado. Se o objetivo for muito avançado e muitas informações novas precisarem ser introduzidas de uma só vez, a memória de trabalho do aluno ficará sobrecarregada e haverá pouca aprendizagem. Se os alunos não dominarem esses pré-requisitos, as informações faltantes devem ser introduzidas em uma aula separada antes de prosseguir com os novos objetivos.

Durante a introdução à aula, o professor revisa os pré-requisitos já aprendidos. Essa revisão tem dois objetivos: permite que o professor avalie a prontidão de cada criança para a próxima aula e proporciona uma revisão valiosa para os alunos. Como mencionado anteriormente, muitos alunos com baixo desempenho em matemática têm dificuldade em recuperar informações aprendidas anteriormente. Sem a revisão, esses alunos podem perder um tempo valioso durante a aula tentando relembrar as habilidades dos pré-requisitos e, assim, perder informações instrucionais cruciais.

Na instrução explícita, ativar o conhecimento prévio não significa simplesmente perguntar aos alunos: "Vocês se lembram de quando trabalhamos neste procedimento na semana passada?". Alunos que não se lembram raramente correm o risco de passar vergonha ao admitir sua ignorância diante dos colegas. Também não basta simplesmente pedir a alguns alunos que venham ao quadro para resolver um problema de exemplo ou explicar as informações. Embora os voluntários que explicam possam ter os pré-requisitos necessários, esse procedimento não fornece ao professor nenhuma informação sobre o quão bem o restante da turma dominou e consegue se lembrar dos pré-requisitos. Em uma aula de instrução explícita, o professor revisa os pré-requisitos fornecendo uma tarefa que exige que cada indivíduo do grupo demonstre compreensão. Se o grupo for pequeno, essa revisão pode ser realizada pedindo aos alunos que resolvam alguns problemas de revisão em suas carteiras. Esse procedimento pode proporcionar uma revisão eficaz para os alunos, mas só fornecerá dados úteis de avaliação formativa para o professor se o grupo for pequeno o suficiente para que o professor possa monitorar o trabalho de cada aluno e verificar a compreensão antes de prosseguir. Se o grupo for muito grande para que o professor monitore a produção de cada aluno, pode ser mais eficaz pedir aos alunos que forneçam uma resposta mais fácil de monitorar. Por exemplo, se o professor quiser verificar a lembrança dos alunos sobre o valor das moedas, ele

Cada criança com um quadro branco e um marcador, em seguida, segure uma moeda e peça aos alunos que escrevam o valor da moeda em seus quadros brancos e segurem os quadros para ela ver. O conhecimento dos numerais pode ser revisado exibindo um numeral e pedindo aos alunos que levantem o número correspondente de dedos. O reconhecimento de números primos e compostos pode ser avaliado segurando um número e pedindo aos alunos que façam sinal de positivo se for um número primo e de negativo se for um número composto. Procedimentos como esses permitem que todas as crianças participem ativamente, ao mesmo tempo que permitem que o professor avalie sua compreensão. A revisão deve continuar até que todos os alunos sejam fluentes com as informações básicas necessárias.

Apresentação de Novo Conteúdo

Alunos com dificuldades em matemática se beneficiam quando novas informações são modeladas claramente pela primeira vez. Isso às vezes é chamado de parte da aula "Eu faço". Quando uma nova habilidade ou estratégia é introduzida, o professor precisa modelar explicitamente o processo. O professor demonstra o procedimento enquanto o descreve simultaneamente. Por exemplo, se os alunos estão aprendendo a escrever o numeral "2", o professor primeiro demonstra como formar o numeral enquanto verbaliza o processo simultaneamente. Combinar a demonstração visual com uma descrição verbal do processo aumentará a retenção, modelando a conversa interna que os alunos podem usar ao executar o processo eles mesmos. Ao demonstrar como formar um "2", o professor pode dizer: "Comece perto do topo, curve para cima até a linha de cima, curve para baixo até a linha de baixo e, em seguida, em linha reta. Isso é um 2. Curve para cima, curve para baixo até a linha de baixo e, em seguida, em linha reta."

Descrever seus pensamentos e ações enquanto executa a habilidade é frequentemente chamado de "pensar em voz alta". As palavras usadas na descrição devem ser simples, claras, concisas e consistentes. Como muitos alunos com dificuldade em aprender matemática também apresentam déficits de linguagem, usar uma linguagem simples permitirá que os alunos se concentrem na compreensão das informações, em vez de se distraírem com vocabulário complexo. Modelar vários exemplos e usar consistentemente as mesmas palavras todas as vezes proporciona repetição, o que facilita a retenção e ajuda os alunos a internalizar o procedimento.

No exemplo a seguir, um professor usa a reflexão em voz alta para modelar a notação de comparação. Antes de introduzir o símbolo de comparação, a professora revisaria a questão, pedindo aos alunos que praticassem a identificação do maior ou menor número entre dois números, o que é um pré-requisito para essa habilidade. Para tornar o símbolo mais significativo para os alunos, ela poderia compará-lo à boca de um jacaré faminto que quer devorar o maior número que encontrar. Em seguida, a professora demonstra como inserir o símbolo entre dois números. Ela coloca o problema "8 5" no quadro e usa o — recurso de pensar em voz alta para compartilhar seus pensamentos enquanto insere o símbolo de comparação entre os dois números.

Vejamos. Primeiro, preciso decidir qual número é maior. Sei que 8 é maior que 5. Dissemos que o jacaré faminto quer comer o maior número que encontrar. Isso significa que a boca aberta precisa apontar para o 8. Então, vou desenhar meu símbolo com a parte aberta voltada para o 8, assim.
(*Inserir o símbolo para mostrar que $8 > 5$.*) Agora a boca está pronta para comer o número maior. Leio a expressão da esquerda para a direita: 8 é maior que 5.

Ao introduzir procedimentos mais complexos, os professores devem fornecer modelos passo a passo, pensando em voz alta enquanto modelam cada etapa (Archer & Hughesm, 2011; Gersten et al.,

2009, McLeskey et al., 2017). Alunos com déficits em metacognição têm dificuldade em selecionar e executar estratégias apropriadas. Quando confrontados com problemas de múltiplas etapas, esses alunos precisam de modelos claros e inequívocos de cada etapa do processo complexo. A verbalização não apenas descreve o *que* fazer, mas também fornece insights sobre o *porquê*.
para fazer isso.

Na [Figura 5.4](#), um professor utiliza a estratégia de pensar em voz alta para modelar uma estratégia explícita para subtrair números de dois dígitos quando o reagrupamento é necessário. Os pré-requisitos para essa habilidade incluem reagrupamento em adição, cálculo de fatos básicos de subtração e compreensão do valor posicional (decomposição de números, notação expandida e "trocas" para trocar 10 unidades por 1 dezena). Os alunos devem ter demonstrado domínio desses pré-requisitos durante as aulas anteriores. Durante a introdução da aula, o professor revisará esses pré-requisitos.

Figura 5.4 Modelando uma estratégia explícita para reagrupamento na subtração

Steps for Regrouping in Subtraction	
1. Show how many I have (the total). 2. ONES Column: Decide: Need to regroup? TO REGROUP: Make a trade. Record. Subtract ones & record. 3. TENS Column: Subtract & record. 4. Check.	
The teacher says:	The teacher shows:
Here's our problem. We have 35 science books in the room, and we need to keep 18 of them here so each of you can have a book. We want to know how many books we have left that we could let Mrs. Rivera use.	35 -18
I'm going to follow these steps to solve the problem. (Points to the steps listed above.)	TensOnes 35 -18
Step 1 says, "Show how many I have." Let's see. We have 35, so I need to use my base ten blocks to show 35. First I'm going to make a place to put my tens and ones. I'll draw lines and label the columns 'ones' and 'tens.' Draws a place value chart.	TensOnes 35 -18
OK. Now I need to lay out 35. I can use my base ten blocks to show 35 with 3 rods and 5 units. That's 3 tens in the tens column, and 5 ones in the ones column. Lays out 35 blocks. Let's see. Have I finished step 1? It says, "Show how many I have." I've done that, so I'm going to check off step 1. Puts a check next to #1 in the steps listed above. I don't lay out 18 blocks, because the bottom number in a subtraction number tells me how many I will need to take away from the total.	TensOnes 35 -18
Step 2 says, "ONES column. Decide: Do I need to regroup?" Alright, I'm going to subtract the units in my ones column first. I have 5 ones, but I need to take away 8 ones. I don't have enough ones to do that, so	

Figura 5.4 (Continuação)

I guess I need to regroup. It says, "To regroup, make a trade." I remember when we played "Making Trades" that I can break down a ten and change it to ten ones, without changing the total amount. I'm going to do that. I'm going to take one of my tens and break it apart. Now I have ten more in the ones column. I had 5, and I've added 10 more, so now I have 15 ones. I broke down a ten and moved it to the ones. I've done that, so I can check that off. *Checks off "REGROUP" in the steps listed above.*

Next, it says, "Record." I used to have 3 tens, but I regrouped and now I only have 2 tens, so I'll cross of the 3 and change it to say I have 2 tens. I used to have 5 ones, but now I have 15 ones, so I need to make my problem say that.

Alright. I've completed that step, so I can check it off. *Checks off "Record."*

Now it says, "Subtract ones, and record." O.K. I have 15 ones and I'm supposed to take away 8. I'm going to do that. Now I've got (counting) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 left. That makes sense because I know that $15 - 8 = 7$. I need to record the answer, so I'll write 7 in the ones column. Now I can check that off. *Checks off "Subtract ones & record."*

Step 3. "TENS Column: Subtract and record." I have 2 tens and I need to subtract 1 of them. I'm going to take one bundle of tens from the tens column. That means I have 1 ten left, so I'll write '1' in the tens column. I can check off step 3, and I'm done. *Checks off Step #4 above.*

Step 4. Check. Let's look at our problem. Let's count and see if the blocks match what we have written. I have one ten and 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ones. That's 17. It matches!

Ok, we have solved our problem! Right now our class has 35 science books and we're using 18 of them. We figured out that we have 17 left over that we can lend to Mrs. Rivera's class.

35
-18

Tens	Ones

21
35
-18

Tens	Ones

21
35
-18
7

Tens	Ones

21
35
-18
17

Tens	Ones

e envolver os alunos na nova habilidade, fornecendo uma aplicação real de reagrupamento, como o seguinte problema:

A Sra. Rivera veio até mim esta manhã e pediu emprestados os livros de ciências da nossa estante. Eu disse a ela que usaríamos alguns deles, mas que eu veria quantos extras temos disponíveis. Temos 35 livros na estante. Há 18 alunos nesta turma, então precisamos ficar com 18. Quantos livros sobraram para a Sra. Rivera usar?

Observe que, embora o exemplo comece com um problema verbal, o foco desta lição é ensinar aos alunos o algoritmo padrão para reagrupamento na subtração. O problema verbal fornece um contexto para o ensino do algoritmo. O processo de resolução de problemas verbais seria ensinado em uma lição separada, pois alunos com déficits de memória ou problemas de controle executivo frequentemente ficam sobrecarregados quando as lições introduzem muita informação.

informações de uma só vez.

Modelar explicitamente estratégias não significa ensinar aos alunos procedimentos de rotina sem desenvolver a compreensão conceitual. No [Capítulo 3](#), discutimos a importância de usar o continuum concreto-pictórico-abstrato (CPA) para ajudar os alunos a compreender conceitos matemáticos. Os alunos devem primeiro ter experiência prática usando modelos concretos e, em seguida, progredir para imagens, contagens ou outros tipos de ilustração antes de serem solicitados a executar um procedimento usando apenas palavras e símbolos abstratos. Explorar modelos concretos dá significado aos conceitos abstratos. Os alunos não estão praticando procedimentos de rotina, mas sim desenvolvendo a compreensão conceitual da lógica subjacente a esses procedimentos. A modelagem explícita é integrada a cada etapa do continuum CPA para ajudar os alunos a compreender e executar procedimentos. O uso do continuum CPA para desenvolver a compreensão conceitual será discutido em mais detalhes no [Capítulo 6](#). Além disso, é importante que os alunos discutam o que estão fazendo e por que estão fazendo dessa forma. Pedir aos alunos que verbalizem seu raciocínio é uma maneira poderosa de aprofundar a compreensão.

Durante a parte de modelagem da aula, o professor primeiro demonstra como bons solucionadores de problemas abordam um problema usando múltiplos exemplos claros e inequívocos (Gersten et al., 2009, p. 22). Fornecer múltiplos exemplos permite que o aluno veja uma estratégia aplicada em diversos contextos e aumenta a probabilidade de que os alunos se lembrem e sejam capazes de aplicá-la eles próprios quando se depararem com problemas semelhantes no futuro. Essa importante característica deve ser incluída como critério na seleção de materiais de intervenção (Gersten et al., 2009).

Após a apresentação de exemplos eficazes, também é útil modelar exemplos que incluam erros. Modelar o uso incorreto de uma estratégia permite que o professor demonstre automonitoramento, uma habilidade que muitos alunos com deficiência não possuem. O professor pode mostrar aos alunos como reconhecer se suas respostas fazem sentido e como corrigir erros. No entanto, é melhor que, na apresentação inicial, os alunos modelem o procedimento correto e apenas o professor simule os erros. Haverá oportunidades naturais para os alunos praticarem a autocorreção durante a instrução.

Modelar estratégias não significa que o professor fale e pense por si só, enquanto os alunos são receptores passivos. Os alunos aprendem mais quando participam ativamente. Na [Figura 5.4](#), o professor perdeu várias oportunidades de envolver os alunos. O valor posicional foi identificado como uma habilidade pré-requisito, então o professor poderia ter pedido aos alunos que apontassem a coluna das unidades ou ajudassem a decompor uma dezena. O conhecimento de fatos básicos de subtração também era um pré-requisito, então o professor poderia ter pedido aos alunos que calculassem $15 - 8 = 7$ ao concluir a etapa 3. Durante os exemplos subsequentes, o professor poderia envolver os alunos no acompanhamento das etapas da estratégia. Por exemplo, o professor poderia perguntar aos alunos: "Qual é a etapa 1?". Quando os alunos responderem: "Mostre quantos eu tenho", o professor poderia então perguntar: "O que isso significa para este problema? Quantos eu tenho? Como vou mostrar?". Envolver os alunos no processo ajuda a manter a atenção deles, e sua participação ativa aumenta o aprendizado.

Prática Guiada

A prática guiada tem duas funções importantes. Os alunos praticam sob a orientação do professor e recebem feedback corretivo que lhes permite corrigir quaisquer mal-entendidos, e os professores recebem feedback formativo que lhes permite avaliar a compreensão de cada aluno. A habilidade praticada deve ser a mesma que acabou de ser modelada. Não se trata de uma atividade de extensão; os alunos não são solicitados a ir além do que foi modelado, mas sim a fazer eles próprios o que o professor modelou.

Em muitas salas de aula de matemática, os professores demonstram alguns exemplos no quadro e, em seguida, os alunos recebem uma planilha ou tarefa de livro didático e são solicitados a praticar os exemplos.

habilidade por conta própria. Este procedimento é às vezes justificado pelo ditado: "A prática leva à perfeição". Mas o simples ato de praticar algo repetidamente não leva automaticamente à perfeição. A prática leva à permanência. Se quisermos executar com perfeição, precisamos praticar perfeitamente. Em outras palavras, "A prática perfeita leva à perfeição". Se os alunos forem solicitados a praticar uma habilidade independentemente antes de poderem executá-la corretamente, eles praticarão erros, e esses erros podem ser muito difíceis de desaprender. Qualquer pessoa que já tenha tentado ajudar um aluno a desaprender conceitos errôneos anteriores sabe o quão frustrante e demorado isso pode ser tanto para o professor quanto para o aluno. Além de ter um impacto negativo na aprendizagem do aluno, passar muito rápido para a prática independente também pode impactar negativamente a motivação. Alunos que já experimentaram fracasso no passado podem resistir a atividades nas quais antecipam outro fracasso. Eles podem se desviar da tarefa ou se tornarem perturbadores em um esforço para evitar a tarefa, ou podem se apressar em uma tarefa porque sua experiência passada mostrou que, mesmo se trabalharem duro, é improvável que alcancem o sucesso.

Durante a prática guiada, o professor fornece suporte estruturado conforme necessário. O professor pode fornecer dicas visuais, como cartazes ou cartões de dicas listando os passos a serem seguidos, ou lembrar os alunos de um aspecto crítico do problema. O suporte também inclui orientar verbalmente o aluno sobre o que fazer em seguida ou fazer perguntas sobre o processo. As perguntas sobre o processo exigem que os alunos descrevam o processo que estão usando, expliquem seu raciocínio, criem um exemplo ou provem que sua resposta faz sentido. Os alunos pensam em voz alta, assim como o professor fez durante a fase de modelagem da aula. O *Guia de Prática "O que Funciona"* recomenda:

Durante a prática guiada, o professor deve pedir aos alunos que comuniquem as estratégias que estão usando para concluir cada etapa do processo e justifiquem suas decisões. Além disso, o painel recomenda que os professores peçam aos alunos que expliquem suas soluções. Observe que não apenas os intervencionistas — mas também os colegas — podem e devem comunicar ao intervencionista e ao restante do grupo como pensam na resolução de problemas. Isso pode facilitar o desenvolvimento de uma linguagem compartilhada para falar sobre resolução de problemas matemáticos (Gersten et al., 2009, p. 23).

O processo de articulação do raciocínio ajuda os alunos a consolidar a compreensão. No capítulo 2, fornecemos exemplos de perguntas de processo que os professores podem usar para desenvolver e avaliar a compreensão dos alunos (ver [Figura 2.4](#)).

Os prompts são gradualmente eliminados durante a parte de prática guiada da aula. A rapidez com que o professor elimina o suporte depende da complexidade da tarefa e do sucesso do desempenho do aluno. A prática guiada deve continuar até que os alunos sejam capazes de executá-la com sucesso por conta própria. No início da prática guiada, o professor pode apresentar um novo exemplo e pedir aos alunos que deem instruções passo a passo enquanto o orientam na resolução do problema. O professor forneceria prompts conforme necessário, eliminando-os gradualmente à medida que os alunos demonstrassem competência. Em seguida, o professor pediria aos alunos que demonstrassem sua capacidade de executar a habilidade de forma independente, sem prompts. O *Guia de Prática do IES* recomenda: "Para que os alunos se tornem proficientes na execução de processos matemáticos, a instrução explícita deve incluir a prática estruturada, na qual o professor desempenha um papel ativo e transfere gradualmente o trabalho para os alunos" (Gersten et al., 2009, p. 23).

Na prática guiada eficaz, cada aluno responde ativamente de uma forma que permite ao professor avaliar o nível de compreensão de cada aluno. Para a lição apresentada na [Figura 5.4](#), o professor pode pedir aos alunos que resolvam alguns problemas usando quadros brancos individuais e, em seguida, mostrem as respostas enquanto o professor verifica a compreensão. Se houver poucos alunos na turma, o professor pode monitorar cada um deles enquanto trabalham nos problemas em suas carteiras, mas com um grupo maior, seria difícil para um professor usar quadros brancos individuais.

Este procedimento permite monitorar eficazmente a compreensão de cada aluno. Atividades em pequenos grupos podem proporcionar uma prática guiada eficaz se forem estruturadas para garantir que todos os alunos participem ativamente e recebam apoio e feedback corretivo em tempo hábil. Consulte os materiais online para obter exemplos de alguns formatos de prática guiada.

Prática Independente

Na instrução explícita, os alunos praticam de forma independente somente após conseguirem executar com sucesso a tarefa sem a necessidade de instruções. O objetivo da prática independente é fornecer ao aluno repetição suficiente para que o novo aprendizado seja efetivamente armazenado na memória de longo prazo. Alunos com dificuldade para aprender novos conteúdos frequentemente apresentam déficits na memória de trabalho (Chen, Lian, Yang et al., 2017; Fanari & Massidda, 2018; Justicia-Galiano & Martin-Puga, 2017; Lee & Bull, 2016) e precisam de amplas oportunidades de prática antes de consolidarem com sucesso o novo aprendizado. A instrução básica geralmente se move em um ritmo mais rápido e oferece menos prática do que esses alunos precisam para se tornarem proficientes.

Prática em massa

Imediatamente após a instrução, os alunos precisam resolver vários exemplos de problemas semelhantes, usando as mesmas estratégias modeladas durante a instrução. Os períodos de prática são "aglomerados", o que significa que vários períodos de prática são agendados próximos uns dos outros. Por exemplo, após uma prática guiada bem-sucedida, os alunos podem ter vários problemas para resolver de forma independente antes do final do período de matemática. Eles podem fazer mais exemplos para a lição de casa e praticar novamente durante a aula do dia seguinte. Exemplos adicionais serão revisados no início da aula do dia seguinte.

Os problemas apresentados durante a prática independente inicial devem incluir soluções de exemplos resolvidos, bem como problemas para os alunos resolverem de forma independente. Estudos de pesquisa mostraram que os alunos aprendem mais quando exemplos de problemas resolvidos se alternam com problemas que os alunos devem resolver de forma independente (Agarwal & Agostinelli, 20020; Chen, Retnowati & Kalyuga, 2020). Esses estudos demonstraram que pedir aos alunos que resolvam oito problemas práticos de forma independente resulta em menos aprendizado do que se os oito problemas incluíssem quatro exemplos concluídos que mostram as etapas da solução, alternando com quatro problemas que os alunos devem resolver sozinhos. Mesmo que os alunos resolvam menos problemas no segundo cenário, eles têm maior probabilidade de resolvê-los corretamente e ter um melhor desempenho em problemas semelhantes no futuro. Ao dar aos alunos tarefas de prática independente inicial, o aprendizado aumentará se os professores fornecerem uma solução resolvida para todos os outros problemas. Veja a [Figura 5.5](#) para uma ilustração da intercalação de soluções de exemplos resolvidos e exercícios de resolução de problemas.

Figura 5.5 Intercalando Soluções de Exemplo e Exercícios de Resolução de Problemas

Multiplication: <i>Use partial products to solve these problems.</i> <i>Study each step in the examples given to help you solve the next problem on your own.</i>			
$\begin{array}{r} 12 \\ \times 13 \\ \hline 6 \\ 30 \\ 20 \\ \hline 100 \\ 156 \end{array}$	$\begin{array}{r} 34 \\ \times 12 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 45 \\ \times 23 \\ \hline 15 \\ 120 \\ 100 \\ \hline 800 \\ 1035 \end{array}$	$\begin{array}{r} 17 \\ \times 18 \\ \hline \end{array}$

Infelizmente, a maioria dos materiais disponíveis atualmente não fornece exemplos concretos suficientes para os professores utilizarem. Até que os recursos incorporem esses resultados de pesquisa, os professores ou equipes de professores precisarão desenvolver seus próprios exemplos concretos para o conteúdo que ensinam.

Os problemas apresentados durante a prática em grupo também devem incluir exemplos de discriminação que não exijam o uso da nova habilidade ou estratégia. Por exemplo, o professor da [Figura 5.4](#) estava ensinando os alunos a reagrupar na subtração. Durante a prática independente, o professor incluiria exemplos que exigem reagrupamento, mas também deveria incluir exemplos que não exigem reagrupamento. Inserir itens de discriminação evita que os alunos se reagrupem automática e irrefletidamente em todos os problemas que encontram. Quando os alunos pensam criticamente sobre o que estão fazendo e por que estão fazendo, eles são mais capazes de aplicar seus conhecimentos adequadamente no futuro.

Prática Distribuída

Após os alunos dominarem o novo conteúdo, o cronograma de prática passa de concentrado para distribuído. A prática distribuída envolve períodos curtos de prática, com intervalos cada vez maiores entre as revisões. Essa revisão aumenta a retenção a longo prazo e também desenvolve a capacidade dos alunos de recuperar o conteúdo armazenado anteriormente. Os recursos matemáticos atuais também costumam ser insuficientes nessa área. Em muitos programas básicos, os alunos se concentram em uma unidade, depois em outra, sem a prática distribuída necessária para a retenção a longo prazo. Por exemplo, os alunos podem concluir uma unidade sobre multiplicação, depois passar para frações e, em seguida, para medição, sem oportunidade suficiente para revisar o conteúdo abordado nas unidades anteriores. Alunos com déficits de memória são especialmente prejudicados pela prática distribuída insuficiente. Às vezes, os professores se esforçam para ajudar seus alunos a dominar os conceitos no início do ano, apenas para descobrir que esqueceram o material mais tarde. Frequentemente, isso ocorre porque os alunos não receberam oportunidades suficientes de prática distribuída. Oferecer revisão cumulativa ajuda os alunos a manter o conhecimento ao longo do tempo.

Encerramento da aula

A quantidade da lição explícita que é concluída durante um período de instrução variará dependendo dos alunos, da complexidade das informações e da duração do período.

Às vezes, você pode concluir a introdução, a apresentação de novos conteúdos e a prática guiada antes do término do período, tendo até tempo para iniciar a prática independente. Em outros dias, você pode chegar apenas à metade da parte de prática guiada da aula antes do encerramento. Independentemente do progresso da aula ao final do período de ensino, é importante resumir o aprendizado ocorrido naquele dia. Resumir cristaliza os pontos-chave na mente dos alunos. Em vez de dizer aos alunos o que aprenderam, o professor pede que criem o resumo. O processo de selecionar e articular as informações importantes aprofunda a compreensão e aumenta a retenção.

Esses resumos podem assumir diversas formas. O professor pode convocar alunos individualmente para compartilhar suas respostas, pedir que compartilhem suas ideias em um formato de reflexão em dupla ([Kagan, 1994](#)) ou pedir que escrevam ou desenhem suas ideias em um diário. Para a aula de subtração descrita na [Figura 5.4](#), o professor pode encerrar a aula dizendo o seguinte:

Hoje aprendemos como reagrupar na subtração. O que significa reagrupar? *Peça ao aluno que responda.*

Como você sabe que precisa reagrupar ao subtrair?

Solicita que o aluno responda. Em seus quadros brancos, escreva um exemplo de um problema de subtração que exija reagrupamento. *Monitore as respostas e, em seguida, peça a um aluno que explique sua*

Resposta. Nem sempre nos reagrupamos toda vez que subtraímos. Que tipo de problema pode ser resolvido sem reagrupamento? Peça a um aluno que responda. Pense nos passos que seguimos quando nos reagrupamos e, em seguida, compartilhe suas ideias com seu colega.

Monitora o processo de reflexão em dupla e compartilha, depois pede a uma dupla que compartilhe sua resposta com toda a turma. Agora pense em uma situação real em que vocês possam precisar se reagrupar. Compartilhe sua ideia com seu parceiro. *Monitora o processo de reflexão em dupla e compartilha, depois pede a um ou dois alunos que compartilhem seus exemplos com toda a turma.*

Observe que o resumo não é meramente uma declaração do tópico abordado (reagrupamento na subtração), mas exige que os alunos resumam os pontos principais da lição.

Como a instrução explícita melhora a motivação

Foi demonstrado que instruções explícitas melhoram os resultados e ajudam alunos com dificuldades a alcançar o domínio. Os seguintes aspectos específicos da instrução explícita facilitam o sucesso e, portanto, levam a uma maior motivação.

1. Durante a introdução da aula, ativar o conhecimento prévio e as habilidades necessárias prepara os alunos para usar essas informações quando novos conteúdos forem introduzidos. Os alunos têm menos probabilidade de se frustrar por terem esquecido o conteúdo já dominado e são mais propensos a abordar a aula com uma atitude positiva de "posso fazer".
2. A introdução de informações em pequenas etapas cuidadosamente sequenciadas minimiza a frustração e permite que indivíduos com déficits de memória e problemas de processamento cognitivo experimentem sucesso de referência.
3. Oferecer apoio estruturado aumenta o sucesso. Quando o apoio dos professores diminui gradualmente, os alunos ganham confiança e ficam mais dispostos a enfrentar problemas semelhantes sozinhos no futuro.
4. A prática guiada permite que o professor verifique a compreensão dos alunos antes de pedir que pratiquem de forma independente. O professor pode corrigir mal-entendidos rapidamente, o que ajuda a garantir que os alunos consigam trabalhar com sucesso por conta própria. Quando os alunos apresentam um bom desempenho, o professor pode fornecer feedback positivo, aumentando assim a confiança dos alunos.
5. A revisão frequente aumenta a probabilidade de os alunos reterem o conteúdo previamente dominado. Quanto mais claramente os alunos se lembrarem do que aprenderam, mais confiança sentirão ao abordar futuras tarefas matemáticas.

Como a instrução explícita produziu fortes resultados positivos entre alunos que tiveram dificuldades matemáticas, o guia de prática do IES recomenda que ela seja usada em todas as intervenções em níveis (Gersten et al., 2009). Também foi identificada como a prática baseada em evidências para uso com todos os alunos com deficiências acadêmicas (McLeskey et al., 2017).

Resumo

Estudos de pesquisa de alta qualidade têm demonstrado consistentemente que a instrução explícita pode melhorar o desempenho matemático de alunos com dificuldades em matemática, sendo o método de ensino recomendado para alunos que recebem intervenções matemáticas. Pesquisas sugerem que alunos que não conseguem progredir adequadamente em matemática frequentemente apresentam problemas de memória de trabalho, memória de longo prazo e função executiva.

A típica aula baseada em investigação, preferida por muitos educadores matemáticos, apresenta tarefas complexas que sobrecarregam a capacidade de memória desses alunos e desafiam suas habilidades metacognitivas. Com instruções explícitas, as informações são apresentadas em blocos menores e, portanto, mais acessíveis para alunos com déficits de memória.

Os principais componentes da instrução explícita incluem a introdução da lição, a revisão de habilidades e conceitos pré-requisitos, a apresentação de novos conteúdos, a prática guiada, a prática independente e o encerramento da lição, resumidos na [Figura 5.1](#) no início do capítulo. Nos materiais online, fornecemos exemplos de planos de aula que seguem o modelo de instrução explícita e um formulário que pode ser usado na elaboração de uma aula de instrução explícita. Nos capítulos seguintes, discutimos como usar representações concretas e pictóricas para desenvolver a compreensão e fornecemos exemplos adicionais de instrução explícita para apoiar alunos com dificuldades em matemática.

6

Concreto e Visual Representação

Alunos bem-sucedidos em matemática têm uma noção rica do significado dos números e conseguem se envolver em raciocínio quantitativo. Se o professor disser a palavra "doze", um indivíduo com um forte senso de 12 visualizará facilmente 12 objetos, 12 marcas de contagem, uma dúzia de ovos dispostos em duas fileiras de seis, uma matriz 3x4, um grupo de $10 + 2$, o numeral "12" e assim por diante. Todas essas são maneiras diferentes de representar 12. A capacidade de representar grandezas matemáticas de múltiplas maneiras é um componente crítico do raciocínio quantitativo. A representação permite que os alunos organizem informações matemáticas, descrevam relações matemáticas e comuniquem ideias matemáticas a outros. De acordo com o Conselho Nacional de Professores de Matemática (NCTM), "Representar ideias e conectar as representações à matemática está no cerne da compreensão da matemática" (NCTM 2000, p. 136). Para destacar o papel essencial que a representação desempenha no ensino eficaz da matemática, o NCTM desenvolveu o Padrão de Representações, que afirma:

Os programas de ensino desde a pré-escola até o 12º ano devem permitir que todos os alunos:

- Criar e usar representações para organizar, registrar e comunicar ideias matemáticas;
- Selecionar, aplicar e traduzir entre representações matemáticas para resolver problemas;
- Usar representações para modelar e interpretar fenômenos físicos, sociais e matemáticos.

NCTM 2000, pág. 67

A representação pode assumir diversas formas. Os alunos podem usar objetos concretos para demonstrar conceitos matemáticos, como quando usam blocos de brinquedo para modelar um problema de adição ou cortam uma pizza em oito pedaços iguais para ilustrar partes fracionárias de um todo. Eles podem desenhar figuras desses mesmos objetos ou usar marcas de contagem ou gráficos para registrar quantidades. Ideias matemáticas também podem ser representadas por palavras e símbolos. O processo de representação de suas ideias ajuda os alunos a construir significados, bem como a organizar e esclarecer seu pensamento. A associação de diferentes representações do mesmo conceito ou procedimento matemático aprofunda a compreensão matemática do aluno.

Pesquisa sobre a sequência Concreto-Pictórico-Abstrato (CPA)

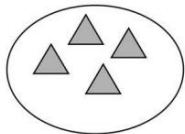
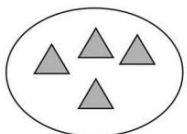
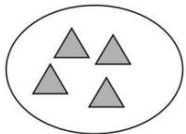
A compreensão conceitual da quantidade segue uma sequência de desenvolvimento. Começa no nível concreto, quando os alunos representam fisicamente um problema matemático ou usam objetos manipuláveis como blocos, palitos de dente, peças de fração ou outros objetos tridimensionais para modelar uma relação matemática. Manipuláveis incluem quaisquer objetos que os alunos possam manipular fisicamente e que forneçam uma representação concreta de uma ideia matemática. No entanto, só porque um aluno consegue manipular um objeto não significa que ele possa ser usado efetivamente para modelar um conceito matemático. Por exemplo, os alunos podem manipular moedas, mas elas não são os melhores objetos manipuláveis para introduzir décimos e centésimos decimais, porque as moedas não fornecem um modelo concreto de seus valores relativos. Moedas de um centavo e de cinco centavos são maiores que moedas de dez centavos, mas seus valores de \$ 0,01 e \$ 0,05 são ambos menores que o valor da moeda de dez centavos. Os objetos manipuláveis que usamos para representar conceitos matemáticos devem fornecer um modelo visual claro do conceito. Blocos de base dez são mais eficazes para modelar os valores relativos de décimos e centésimos decimais, porque mostram claramente o valor dos diferentes decimais. Se um plano (bloco quadrado de 10x10) representa um inteiro, então uma barra (bloco de 1x10) representa 0,10 e uma unidade (bloco de 1x1) mostra o valor de 0,01. As moedas fornecem um exemplo da vida real de por que entender decimais é importante, e seu uso nas aulas é incentivado. No entanto, os alunos precisam experimentar manipulativos como blocos de base dez que fornecem uma ilustração concreta dos tamanhos relativos de diferentes decimais durante a instrução inicial. Cartas de baralho representam outro exemplo de objetos tridimensionais que os alunos podem manipular, mas que não modelam concretamente conceitos matemáticos. As cartas são úteis para aumentar o engajamento do aluno, mas as cartas contêm representações pictóricas e abstratas de valores numéricos, não uma representação concreta dos valores relativos dos numerais. Os jogos de cartas fornecem materiais de prática eficazes e envolventes, mas os manipulativos que os alunos usam durante a instrução inicial devem fornecer uma representação concreta que os permita criar um modelo claro do conceito. Há muito tempo, pesquisas estabelecem que, quando os alunos têm a oportunidade de usar materiais concretos, suas representações mentais são mais precisas e abrangentes, eles têm uma maior compreensão de ideias matemáticas, são mais capazes de aplicá-las a situações da vida real e frequentemente demonstram maior motivação e comportamento na tarefa (Harrison & Harrison, 1984; Suydam & Higgins, 1977).

À medida que sua compreensão se aprofunda, os alunos passam a usar representações pictóricas, como desenhos, marcas de contagem, diagramas, gráficos, tabelas ou outras ilustrações bidimensionais para modelar conceitos e procedimentos matemáticos. Com a prática, eles aprendem a conectar essas representações bidimensionais e tridimensionais a palavras e símbolos abstratos até que, finalmente, as palavras e os símbolos tenham significado por si só e os alunos sejam capazes de representar conceitos e procedimentos matemáticos com eficiência usando apenas os símbolos abstratos. No [Capítulo 5](#), fornecemos um exemplo de vinculação explícita de representações concretas, pictóricas e abstratas ao ensinar o algoritmo padrão para reagrupamento na subtração (ver Figura 5.4). [A Figura 6.1](#) mostra como a multiplicação pode ser representada usando representações concretas, pictóricas e abstratas.

Quando palavras e símbolos matemáticos estão firmemente enraizados em experiências concretas, os alunos os consideram significativos. Quando os alunos carecem de base em representações concretas e visuais, suas tentativas de realizar operações simbólicas frequentemente se tornam uma execução mecânica de procedimentos sem sentido.

A progressão da compreensão é denominada continuum concreto-representacional-abstrato (CRA), ou continuum concreto-pictórico-abstrato (CPA) (Sousa, 2007; Witzel, 2005). Baseado no trabalho de Jerome Bruner na década de 1960 (Bruner, 1960), o continuum CPA tem sido apoiado por educadores matemáticos há décadas. O NCTM recomenda a incorporação de

Figura 6.1 O Continuum CPA

The representations below are designed to use when teaching the following Common Core Standard: CC.3.OA.1. Interpret products of whole numbers, e.g., interpret 5×7 as the total number of objects in 5 groups of 7 objects each. <i>For example, describe a context in which a total number of objects can be expressed as 5×7.</i>		
Concrete Representation: Use objects to represent 3×4. For example, lay out 3 plates, and place 4 cookies in each plate.		
		
Pictorial Representation: Use a picture to show 3×4. For example, draw 3 circles to represent the 3 plates, then draw 4 cookies on each plate. The student might use circles, triangles, dots, or other shapes to represent the cookies.		
		
Abstract Representation: Represent the problem in <u>words</u>. <i>There were 3 children at my party. I gave each child 4 cookies. In all, how many cookies did I give away?</i> Represent the problem using numbers and symbols: $3 \times 4 = 12$		

o continuum CPA em materiais instrucionais básicos em todos os níveis de ensino (NCTM, 1989, 2000) e é um componente-chave dos Padrões Estaduais Básicos Comuns para Matemática (2010). Trata-se de uma prática baseada em evidências para todos os níveis de ensino, respaldada por um amplo conjunto de pesquisas (ver, por exemplo, Bouck, Park e Nickell, 2017; Fuchs, Powell et al., 2008; Gibbs, Hinton e Flores, 2017; Peltier e Vannest, 2017; Sealander, Johnson, Lockwood e Medina, 2012; Witzel, Mercer e Miller, 2003; Woodward, 2006). Seguir o continuum do CPA é especialmente crucial para alunos com dificuldades em matemática. Após uma revisão exaustiva da pesquisa, os autores do Guia de Práticas do IES (2009) o incluíram como uma de suas oito recomendações para auxiliar alunos com dificuldades em matemática: “Os materiais de intervenção devem incluir oportunidades para os alunos trabalharem com representações visuais de ideias matemáticas e os intervencionistas devem ser proficientes no uso de representações visuais de ideias matemáticas” (Gersten et al., 2009, p. 6).

O ritmo da instrução CPA é uma consideração importante ao elaborar aulas para alunos que tradicionalmente têm dificuldades com matemática. Constatou-se que indivíduos com dificuldades de aprendizagem precisam de cerca de três aulas no nível concreto, cada uma com aproximadamente 20 problemas, antes de estarem prontos para usar o suporte concreto, e depois mais três aulas no nível pictórico antes de desenvolverem a compreensão conceitual e estarem prontos para trabalhar apenas com palavras e símbolos abstratos (Hudson & Miller, 2006).

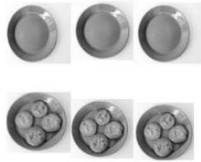
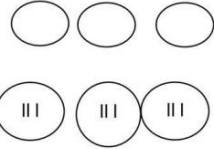
Para progredir de um nível para outro dentro da sequência CPA, Hudson e Miller sugerem que os alunos sejam capazes de resolver dez problemas práticos independentes com pelo menos 80% de precisão. Essas descobertas são consistentes em uma ampla gama de conteúdos matemáticos, desde noções básicas de números até álgebra (Butler, Miller, Crehan, Babbitt e Pierce, 2003; Harris, Miller e Mercer, 1995; Hudson, Peterson, Mercer e McLeod, 1988; [Mercer e Miller, 1992](#); [Miller, Harris, Strawser, Jones e Mercer, 1998](#); Miller, Mercer e Dillon, 1992; [Peterson, Mercer e O'Shea, 1988](#)). Embora o uso de materiais manipuláveis e representação visual seja às vezes visto como uma técnica usada apenas com crianças mais novas, estudos demonstram o valor de continuar a incorporar representação concreta e visual com alunos do ensino médio ([Huntington, 1995](#); Maccini & Hughes, 2000; Maccini & Gagnon, 2000; [Witzel, 2005](#)).

Infelizmente, muitos livros didáticos elaborados para o ensino básico não fazem uso adequado do continuum da ACP para desenvolver o raciocínio matemático ([Bryant et al., 2008](#); Hodges, Carly e Collins, 2008; Gersten et al., 2009). A maioria dos livros didáticos analisados não utiliza consistentemente representações concretas ou pictóricas ao introduzir novos conceitos. Quando incluem representações concretas e pictóricas, elas desaparecem muito rapidamente (Alkhateeb, 2019). Não há repetição suficiente para que alunos com dificuldades consolidem sua compreensão. Portanto, os intervencionistas frequentemente precisam complementar materiais comerciais com exemplos adicionais usando objetos, imagens, gráficos e outras representações visuais.

Os intervencionistas também precisam destacar a relação entre as várias formas de representação. Case (1998, p. 1) explica que “alunos com bom senso numérico podem transitar perfeitamente entre o mundo real das quantidades e o mundo matemático dos números e expressões numéricas”. No entanto, alunos com dificuldade em compreender conceitos matemáticos frequentemente têm dificuldade em conectar as várias formas de representação matemática (Hecht, Vogt e Torgesen, 2007). Embora pareçam compreender um conceito quando ele é representado concretamente ou por meio de imagens ou outras representações visuais, alunos com dificuldades em matemática podem não reconhecer como as representações se relacionam com o mesmo conceito quando apresentadas na forma de palavras ou símbolos abstratos. Como a compreensão dos alunos sobre a relação entre representações tem sido associada a uma maior compreensão de conceitos matemáticos, o Guia de Práticas do IES a identifica como uma prática baseada em evidências, afirmando: “Também recomendamos que os intervencionistas vinculem explicitamente as representações visuais às representações simbólicas padrão usadas em matemática” (Gersten et al., 2009, p. 31). Em outras palavras, os intervencionistas devem introduzir um conceito concretamente e, em seguida, mostrar aos alunos como essa representação concreta se conecta às representações visual e abstrata, usando uma linguagem consistente para destacar as relações. [A Figura 6.2](#) mostra como um professor poderia conectar explicitamente representações concretas, pictóricas e abstratas durante uma aula introdutória de multiplicação. (A parte da aula mostrada na figura ilustra a modelagem inicial fornecida durante a instrução explícita. A aula completa incluiria todos os componentes de uma aula explícita.) Observe que o professor apresenta todas as três formas de representação durante essa apresentação inicial. Com base nas descobertas de Hudson e Miller, o professor continuaria a incluir a representação pictórica. Em seguida, se os alunos demonstrassem compreensão, o professor poderia interromper o uso de materiais manipuláveis e se concentrar em parear representações bidimensionais com rótulos abstratos por mais três aulas. Por fim, se os alunos demonstrassem compreensão, o professor poderia interromper todas as representações visuais e usar apenas números e palavras abstratas.

Scheuermann, Deshler e Shumaker (2009) desenvolveram um método instrucional que combina elementos de instrução explícita com elementos de instrução investigativa. Eles denominaram seu modelo de “Rotina de Investigação Explícita”. Em vez de o professor criar a instrução inicial,

Figura 6.2 Vincular explicitamente o CPA

CC.3.OA.1. Interpret products of whole numbers, e.g., interpret 5×7 as the total number of objects in 5 groups of 7 objects each. For example, describe a context in which a total number of objects can be expressed as 5×7 .	
Teacher says:	Teacher Shows:
I need your help to solve a problem. I'm going to have 3 children at my house tomorrow, and I want to give each of them 4 cookies. I need to figure out how many cookies I will need in all, so that I'll have enough to give each child 4 cookies. First I'm going to write my problem on the board. There will be 3 children, and each child gets 4 cookies. That is a multiplication problem. I will write it like this (<i>writes 3×4</i>) The first number, the 3, tells how many groups I have. I have 3 groups, one for each of the 3 children. The second number, the 4, tells me there are 4 objects in each group. Each child gets 4 cookies. <i>Concrete Representation:</i> I have some plates here that I can use to show my problem. Each plate will represent one group. How many plates do I need? Yes, 3 plates, one for each child. (<i>Puts out 3 plates</i>) Now I need to put cookies on each plate. How many cookies should I put on each plate? Yes, 4. (<i>Puts 4 cookies on each plate</i>) Did I show 3×4? Good. <i>Pictorial Representation:</i> I want to take notes to help me remember what I've done. I'm going to draw 3 circles on the board to represent the 3 plates. (<i>Draws 3 circles</i>) Now I'll put cookies on each plate. My drawing doesn't have to be fancy, so I'm just going to use lines to represent the cookies. (<i>Draws cookies</i>) Let's check. Did I show 3×4? Does my drawing match the plates of cookies on the table? Good! <i>Abstract Representation:</i> Let's solve the problem. How can I determine how many cookies I'll need in all? Sure, I can count. Let's count together. (<i>Counts the 12 cookies with class</i>) I'll need 12 cookies. I'm going to write that in my equation like this (<i>Records the product in the equation</i>) 3 groups of 4 objects equals 12 objects. $3 \times 4 = 12$.	$3 \times 4 =$   $3 \times 4 = 12$

modelo, a rotina de investigação explícita dá aos alunos mais informações nos estágios iniciais da aula. O professor faz uma série de perguntas cuidadosamente estruturadas para conduzir os alunos pelo processo representacional, monitorando suas respostas em uma atividade de prática guiada estendida para garantir a compreensão dos alunos antes de passar para a prática independente. Primeiro, o professor propõe um problema matemático e envolve toda a turma em uma discussão sobre maneiras de representá-lo. Os autores chamam essa parte inicial da aula de "diga-me como". A turma faz um brainstorming de maneiras de representar o problema usando objetos concretos. Depois que os alunos criam um modelo concreto bem-sucedido, o professor pede que eles façam um brainstorming de maneiras de representar o problema usando representação visual. Em seguida, o professor passa para a representação abstrata, pedindo ao grupo que desenvolva uma sentença numérica que represente o problema. Após a turma concluir com sucesso o segmento "diga-me como", a aula progride para a fase "diga ao seu vizinho como". Cada aluno se volta para o seu vizinho e explica as representações gráficas e simbólicas que a turma desenvolveu. Por fim, os alunos têm a oportunidade de resolver o problema por conta própria. Eles são instruídos a conversar entre si.

Figura 6.3 A Rotina de Consulta Explícita

Kyle and Andrew have the same number of candies. Kyle has a bowl of candies and 4 additional candies. Andrew has 14 candies.

1. Tell me how . . .

- How could we represent this situation using these objects?
- How can we represent this situation using graphic pictures?
- Is there another way we could represent this same situation?
- How can we represent this situation using math symbols?

2. Tell your neighbor how . . .

- Now tell your neighbor how you represented the situation concretely.
- Tell your neighbor how to represent the situation using graphic pictures.
- Can you explain the mathematical symbols you chose to use to your neighbor?

3. Tell yourself how . . .

As you illustrate and manipulate this situation by yourself, get ready to explain your choices. You may want to talk yourself through the process because I may ask you why you chose to use what you did.

Reference: Scheuermann, A. M., Deshler, D. D., & Schumaker, J. B. (2009). The effects of the explicit inquiry routine on the performance of students with learning disabilities on one-variable equations. *Learning Disability Quarterly*, 32(2), 103-120.

o processo e estar preparado para explicar suas escolhas. A Figura 6.3 mostra as etapas da Rotina de Investigação Explícita. Em sua pesquisa, quando esse procedimento foi utilizado, a aprendizagem dos alunos aumentou (Scheuermann, Deshler e Shumaker, 2009). As perguntas cuidadosamente estruturadas ajudam os alunos a desenvolver suas próprias representações e a estabelecer conexões entre modelos concretos, pictóricos e abstratos. O uso da rotina de investigação explícita permite que os alunos se envolvam ativamente na descoberta de maneiras de representar conceitos matemáticos, mas ainda fornece orientação suficiente para que alunos que normalmente têm dificuldades com representação possam ter sucesso.

Seja utilizando instruções explícitas ou a Rotina de Investigação Explícita, quando os instrutores mostram claramente aos alunos a relação entre diferentes representações, o desempenho aumenta. Em muitos programas comerciais, essa é uma área de fragilidade. Quando os livros didáticos utilizam representações concretas e pictóricas, raramente fornecem exemplos suficientes em cada etapa e raramente vinculam explicitamente as várias formas. Se os professores utilizarem consistentemente o continuum CPA para introduzir conceitos e procedimentos matemáticos e, em seguida, vincularem explicitamente os diferentes tipos de representação, poderão melhorar os resultados de aprendizagem. Quando os materiais fornecidos pelo distrito não vinculam explicitamente as representações concretas, visuais e abstratas, os intervencionistas precisarão adicionar esse componente às suas aulas.

Manipulativos Virtuais

A tecnologia moderna agora oferece a opção de usar "objetos" digitais. Esses objetos manipuláveis virtuais são versões bidimensionais de objetos manipuláveis tradicionais. Ao contrário de outras representações bidimensionais, no entanto, os alunos podem manipular os objetos virtuais para demonstrar conceitos e procedimentos matemáticos. Os objetos manipuláveis virtuais, portanto, situam-se entre o "C" e o "P" no continuum da ACP (Moyer, Bolyard e Spikell, 2002). Biblioteca Nacional de Manipuláveis Virtuais (<http://nlvm.usu.edu/en/nav/vlibrary.html>) oferece uma variedade de materiais manipuláveis virtuais gratuitos, apropriados para uso em intervenções em camadas. O site *Illuminations* (<http://illuminations.nctm.org/>) do NCTM também inclui muitos materiais manipuláveis virtuais, assim como o Slidsmania (<https://slidesmania.com/>). [tag/manipulativos/](#)). A tecnologia permite fácil acesso a materiais que podem não estar prontamente disponíveis na sala de aula. Quando o aplicativo é exibido em um quadro inteligente, todo o conteúdo

A turma pode assistir facilmente à demonstração. Alguns alunos consideram essas atividades virtuais especialmente motivadoras. Além disso, materiais manipuláveis virtuais podem auxiliar o ensino online. Os recursos online para o [Capítulo 6](#) incluem uma lista de sites adicionais que oferecem atividades, lições e jogos com materiais manipuláveis virtuais.

Pesquisas com alunos com dificuldades sugerem que aulas que utilizam representação concreta, seja com objetos reais ou manipulativos virtuais, são mais eficazes do que aulas que não incorporam representação concreta (Carbonneau, Marley e Selig, 2013; Larbi e Mavis, 2016). Além disso, pesquisas mostram que a incorporação de manipulativos virtuais pode complementar efetivamente o ensino quando usada em combinação com manipulativos tradicionais (Moyer-Peckham, Salkind e Bolyard, 2008; Reimer e Moyer, 2005; Steen, Brooks e Lyon, 2006; Suh, Moyer e Heo, 2005; Suh e Moyer, 2007). No entanto, as pesquisas que comparam manipulativos virtuais a manipulativos concretos são inconclusivas. A maioria dos estudos não mostra diferença significativa entre os dois, mas alguns descobriram que os alunos preferem manipulativos concretos (Burns & Hamm, 2011; Liggett, 2017; Satsangi, Bouck, Taber-Doughty, Bofferding, & Roberts, 2010). Alunos mais velhos, que às vezes veem os manipulativos concretos como infantis, podem responder mais favoravelmente aos manipulativos virtuais. Um estudo sugere que alunos no espectro autista podem se sair melhor com manipulativos virtuais (Bouck, Satsangi, Doughty, & Courtney, 2014). Pesquisas atuais não comprovaram que os manipulativos virtuais podem substituir objetos tridimensionais para desenvolver a compreensão conceitual. Recomendamos que os alunos que precisam de intervenções em camadas tenham oportunidades de experiências práticas com objetos reais antes de progredirem para a representação virtual mais abstrata, mas também tenham a oportunidade de trabalhar com manipulativos virtuais. Qualquer que seja a forma utilizada, os intervencionistas devem se lembrar de vincular explicitamente os objetos ou manipulativos virtuais às representações simbólicas padrão usadas em matemática.

Recomendações para Implementação da Sequência CPA

Aqui, resumimos recomendações para incorporar materiais manipuláveis e representações pictóricas nas aulas. Nos capítulos subsequentes, forneceremos discussões mais detalhadas e exemplos de maneiras de usar o continuum CPA ao introduzir conceitos matemáticos específicos.

1. Deixe os alunos usarem os materiais manipuláveis eles mesmos. Simplesmente pedir ao professor para usar os materiais manipuláveis em uma demonstração não é suficiente. Os alunos precisam praticar na prática.
2. Ao introduzir novos conceitos e procedimentos, siga o continuum da ACP. Comece com a representação concreta, depois progrida para imagens, contagens, diagramas e outras representações bidimensionais e, em seguida, para palavras e símbolos abstratos. Todos os três tipos de representação podem ser introduzidos na mesma aula, mas os alunos precisam de várias experiências com representação concreta antes de estarem prontos para descartar os materiais manipuláveis e trabalhar apenas no nível pictórico, e de várias outras experiências antes que a representação pictórica possa ser desvanecida e os alunos estejam prontos para confiar apenas na representação abstrata. Estudos demonstraram que alunos com deficiência normalmente precisavam de três aulas usando materiais manipuláveis e mais três usando representação pictórica antes de confiar apenas em palavras e símbolos abstratos. Hudson e Miller (2006) sugerem que os alunos devem ser capazes de completar dez problemas práticos independentes para progredir de um nível para o próximo. Os intervencionistas também podem avaliar a compreensão dos alunos pedindo-lhes que expliquem suas representações. Alunos que conseguem explicar como diferentes representações ilustram o mesmo conceito matemático estão prontos para progredir para o próximo nível.

3. Vincule explicitamente representações concretas, visuais e abstratas, pois alunos com dificuldades frequentemente não conseguem conectar as diversas formas de representação matemática. Vincular explicitamente os diversos sistemas de representação, usar linguagem consistente em todos os sistemas e fazer com que os alunos expliquem como as representações estão conectadas resultou em melhores resultados de desempenho. [A Figura 6.1](#) fornece um exemplo de vinculação de sistemas representacionais.
4. Ao selecionar materiais manipuláveis, escolha os itens com cuidado para destacar claramente o conceito. Não basta simplesmente dar ao aluno um objeto para mover. O material manipulável deve fornecer uma representação tridimensional do conceito ou procedimento matemático que o aluno está aprendendo.
5. Ofereça oportunidades para que os alunos modelem o mesmo conceito usando uma variedade de diferentes materiais manipuláveis e representações visuais. A capacidade de representar ideias matemáticas de múltiplas maneiras é um componente crítico do raciocínio quantitativo. Por exemplo, círculos fracionários são frequentemente usados para modelar partes fracionárias de inteiros, mas os alunos não devem se limitar a pensar em frações como partes de círculos. Sua compreensão será aprimorada se eles também experimentarem outros exemplos, como encontrar partes fracionárias de quadrados e retângulos, ou usar barras de frações, torres e outros materiais manipuláveis. Valores decimais podem ser modelados com uma variedade de materiais manipuláveis, incluindo o uso de blocos de base dez, DigiBlocks ou pesos métricos. Papel milimetrado e retas numéricas permitem que os alunos criem representações visuais de números decimais. Usar uma variedade de diferentes materiais manipuláveis e representações visuais para modelar o mesmo conceito aprofunda a compreensão conceitual dos alunos.
6. Ofereça oportunidades para que os alunos traduzam entre diferentes representações. Alunos com amplo senso numérico conseguem transitar fluentemente entre todos os tipos de representações, mas alunos com dificuldade para representar ideias matemáticas podem ter dificuldade em fazer as mesmas conexões. Por exemplo, dada a representação concreta de uma expressão matemática, um aluno pode ser capaz de escrever uma expressão numérica para descrevê-la.
Esse mesmo aluno pode ficar confuso quando solicitado a inverter o processo e, dada a expressão numérica, representá-la com recursos manipuláveis. Às vezes, os professores rotineiramente pedem aos alunos que criem um tipo de representação, mas negligenciam outros. Para desenvolver uma compreensão conceitual rica, os alunos precisam de oportunidades para praticar a conversão entre todas as formas de representação. Eles devem ter oportunidades para praticar todos os seguintes:
 - Dada uma representação concreta, modele-a usando imagens, diagramas e outros recursos visuais representações, bem como com números e palavras.
 - Dada uma representação visual, modele-a usando materiais concretos, números e palavras.
 - Dada uma expressão numérica, represente-a concreta e visualmente e explique-a de forma palavras.
 - Dado um problema verbal, represente-o usando representação concreta, representação visual e com uma expressão numérica.Essas oportunidades desenvolverão a capacidade dos alunos de transitar fluentemente entre representantes ressentimentos.
7. Ofereça oportunidades para que os alunos expliquem seu raciocínio. Por exemplo, os alunos podem compartilhar com os colegas o processo que seguiram para obter a resposta, ou explicar por que escolheram uma estratégia específica, ou podem registrar seus pensamentos em um diário de matemática ou usar um diagrama para explicar como abordaram um problema específico.
Pedir aos alunos que expliquem o seu trabalho ajuda a consolidar a compreensão e também permite

intervencionistas para avaliar a compreensão dos alunos. O Conselho Nacional de Professores de Matemática (NCTM) recomenda que todos os alunos tenham oportunidades de:

- Organizar e consolidar seu pensamento matemático por meio da comunicação
- Comunicar seu pensamento matemático de forma coerente e clara aos colegas, professores, e outros
- Analisar e avaliar o pensamento matemático e as estratégias de outros
- Use a linguagem da matemática para expressar ideias matemáticas com precisão. (NCTM, 2000, pág. 128)

8. Use materiais manipuláveis criteriosamente e reduza sistematicamente seu uso. Materiais manipuláveis fornecem uma excelente base para a compreensão da matemática, mas o objetivo é que os alunos se tornem proficientes com a representação simbólica padrão e não permaneçam dependentes de suportes concretos. Se os alunos continuarem a trabalhar com objetos concretos, podem não desenvolver a capacidade de funcionar no nível abstrato. Os intervencionistas devem reduzir sistematicamente o uso de materiais manipuláveis e ajudar os alunos na transição para a representação visual e abstrata. Pesquisas com alunos com deficiência sugerem que três experiências com materiais manipuláveis geralmente são suficientes para desenvolver a compreensão inicial. Assim que os alunos forem capazes, reduza os materiais manipuláveis e concentre-se na representação pictórica e abstrata.

Seguir essas sugestões ao incorporar o continuum CPA nas aulas pode aumentar o sucesso em intervenções em níveis.

Resumo

A capacidade de representar grandezas matemáticas de múltiplas maneiras é um componente crítico do raciocínio quantitativo. A representação permite que os alunos organizem informações matemáticas, descrevam relações matemáticas e comuniquem ideias matemáticas a outros.

A compreensão conceitual da quantidade segue uma sequência de desenvolvimento, começando no nível concreto com ações físicas e objetos tridimensionais. À medida que a compreensão se aprofunda, os alunos passam a usar representações pictóricas, como gráficos e diagramas, para modelar relações matemáticas. Se essas representações concretas e visuais forem vinculadas a palavras e símbolos mais abstratos, os alunos eventualmente conseguirão usar palavras e símbolos de forma significativa sem a necessidade das representações concretas e pictóricas. O continuum da ACP é uma prática baseada em evidências recomendada para alunos que recebem intervenções em camadas.

Como os livros didáticos utilizados no currículo básico geralmente oferecem exemplos concretos e pictóricos limitados e raramente mostram aos alunos como as diversas representações se relacionam, os intervencionistas frequentemente precisam intensificar o ensino adicionando esses componentes à aula. Nos próximos capítulos, fornecemos descrições mais detalhadas de maneiras de incorporar representações concretas e pictóricas para ajudar os alunos a dominar números inteiros e racionais.