

# Capítulo 6

## Força Cortante e Momento Fletor

**NOTA DO TRADUTOR** — Neste livro, o diagrama de momentos fletores é traçado de acordo com convenção diferente da usual em nosso meio técnico. Os momentos fletores positivos são representados ACIMA da linha de referência (coincidente com o eixo da barra), e os negativos, ABAIXO dessa linha de referência. A convenção que se adota em nosso meio técnico consiste em representar ABAIXO da linha de referência os momentos fletores positivos. Nos dois casos, porém, conserva-se a mesma convenção de sinais para os valores de  $M$ .

### CONCEITO DE VIGA

Denomina-se viga à estrutura formada por uma barra, de eixo plano, submetida a esforços contidos no plano da estrutura.

### VIGA EM BALANÇO

Quando a viga é apoiada só em uma extremidade, de tal forma que, nesse ponto, não possam girar quer o eixo, quer a seção transversal, diz-se que se trata de uma viga engastada ou em balanço. Na Fig. 6-1,

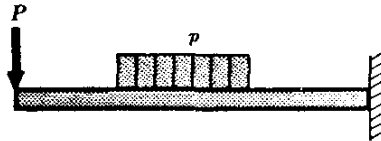


Fig. 6-1

apresenta-se um exemplo desse tipo de viga. A extremidade livre, da esquerda, pode se deslocar (linear ou angularmente) mas a da direita é rigidamente fixada. Esta extremidade é *perfeitamente engastada* ou *um engastamento*. Os esforços reativos, no engastamento, são constituídos por uma força e um binário situados, ambos, no próprio plano da estrutura.

### VIGAS SIMPLES

Uma viga, articulada nas duas extremidades, recebe o nome de viga simples. Os apoios articulados devem, um deles ser articulado fixo, e o outro, articulado móvel. No articulado fixo (que neste livro se representa com um triângulo), a reação é uma força que passa pelo apoio (mas no caso geral não se conhece a direção, o módulo e o sentido); no articulado móvel, a reação é uma força cuja direção se conhece (perpendicular ao plano de deslizamento do apoio, aqui representado por uma circunferência). Se os dois apoios fossem articulados fixos, o problema seria hiperestático; esse tipo de estrutura não será considerado neste livro.

Na Fig. 6-2(a), considera-se uma viga submetida à carga concentrada  $P$ ; na Fig. 6-2(b), a viga suporta a carga distribuída,  $p$ , e o binário de momento  $M$ . Nesses casos, não há componente das forças externas que tenha direção no eixo da viga; a reação, no apoio articulado fixo, só poderá ser perpendicular ao seu eixo.

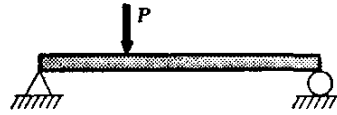


Fig. 6-2(a)



Fig. 6-2(b)

### VIGAS SIMPLES COM BALANÇOS

Quando a viga, simplesmente apoiada, prolonga-se além de um ou de ambos os apoios, diz-se que se trata de viga simples com balanços. É o que se mostra nas Figs. 6-3(a) e 6-3(b).

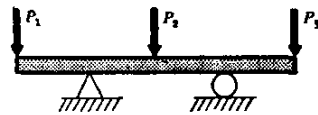


Fig. 6-3(a)

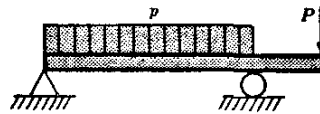


Fig. 6-3(b)

### VIGAS ISOSTÁTICAS

As vigas engastadas e simples, com ou sem balanços, são isostáticas; bastam as equações da estática para determinar as suas reações.

### VIGAS HIPERESTÁTICAS

Quando o número de reações excede o das equações fornecidas pela estática, é necessário recorrer a equações que levam em conta as condições de deformação da viga. Neste caso, a viga é externamente hiperestática. Desse tipo são as vigas da Fig. 6-4; a da Fig. 6-4(a) é apoiada engastada; a da Fig. 6-4(b) é

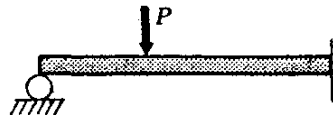


Fig. 6-4(a)

engastada em ambas as extremidades e a da Fig. 6-4(c) é uma viga contínua (com mais de dois apoios, sem articulações).

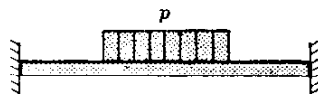


Fig. 6-4(b)

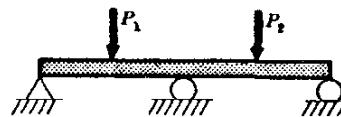


Fig. 6-4(c)

## TIPOS DE CARREGAMENTO

Entre os diversos tipos de carregamento, considerem-se só os permanentes, estes podem ser: cargas concentradas (aplicadas em determinados pontos), cargas distribuídas (uniformes ou variando segundo uma lei qualquer) e binários (de determinado momento) que se aplicam em determinados pontos da viga. Na Fig. 6-5, apresenta-se uma viga com carregamento uniforme, variando triangularmente. As cargas distribuídas são, em geral, expressas por unidade de comprimento do eixo da viga; tem-se, por exemplo, uma carga  $p$  kg/m atuando em determinado trecho, ou ao longo de toda a viga. No caso da Fig. 6-5, o carregamento considerado é a função  $p = p_0 x/l$  onde  $l$  é o vão da viga e  $x$  a distância do ponto considerado ao apoio da esquerda. E, se se adotam as unidades kg e m, a unidade de  $p$  (assim como de  $p_0$ ) é kg/m. Neste livro só se consideram cargas estáticas, isto é, gradualmente aplicadas, desde o valor zero, até o valor final atingido. As cargas dinâmicas, ou aplicadas com choque, requerem um estudo que foge ao escopo deste livro.

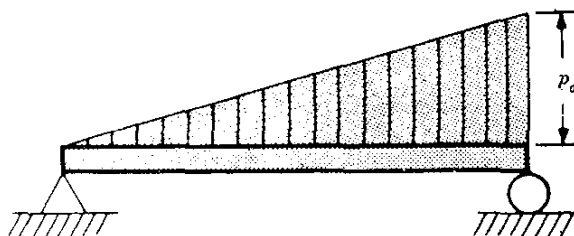


Fig. 6-5

## ESFORÇOS INTERNOS

Quando se carrega uma viga aparecem, em geral, esforços internos, constituídos por tensões normais e de cisalhamento, nos diversos pontos de seu interior. Para determiná-los é necessário, de início, calcular a força e o momento que estão solicitando a seção considerada. Isto se obtém com a aplicação das equações da estática.

Considere-se, por exemplo, o caso particular representado na Fig. 6-6(a). Deseja-se determinar os esforços que estão solicitando a seção transversal,  $D$ , distante  $x$  da extremidade da esquerda. Para isso, suponha-se que se corte a viga em  $D$ , e se remova a parte que está à direita do corte efetuado. Para substituí-la, quanto aos efeitos que ela exercia sobre o trecho  $AD$ , devem-se aplicar, em  $D$ , uma força e um momento, tal como se indica na Fig. 6-6(b) (observe-se que, no caso de forças verticais, a força aplicada deve ser, também, vertical).

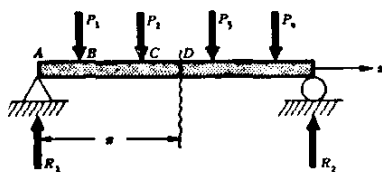


Fig. 6-6(a)

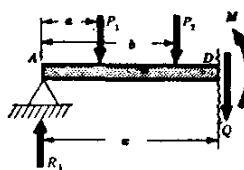


Fig. 6-6(b)

A força  $Q$  e o momento  $M$  (abreviação de binário de momento  $M$ ) conservam em equilíbrio o trecho  $AD$  (juntamente com as cargas  $R_1$ ,  $P_1$  e  $P_2$ ).

### MOMENTO RESISTENTE

O momento  $M$  ilustrado na Fig. 6-6(b) acima é chamado momento resistente na seção  $D$ . O módulo  $M$  pode ser obtido usando uma equação da estática que diz que, para o equilíbrio, a soma dos momentos em relação a um eixo, perpendicular ao plano da figura, deve ser nula. Assim

$$\Sigma M_0 = M - R_1x + P_1(x - a) + P_2(x - b) = 0 \quad \text{ou} \quad M = R_1x - P_1(x - a) - P_2(x - b)$$

Portanto, o momento resistente  $M$  é o momento no ponto  $D$  produzido pelos momentos da reação em  $A$  e das forças aplicadas  $P_1$  e  $P_2$ . É pois o binário devido às tensões distribuídas sobre a seção vertical em  $D$ . Essas tensões agem em direção horizontal e são de tração em alguma parte da seção e de compressão em outra parte. Sua natureza será discutida no Capítulo 8.

### FORÇA CORTANTE RESISTENTE

A força vertical  $Q$  ilustrada na Fig. 6-6(b), é chamada força cortante resistente na seção  $D$ . Para que haja equilíbrio:

$$\Sigma F_v = R_1 - P_1 - P_2 - Q = 0 \quad \text{ou} \quad Q = R_1 - P_1 - P_2$$

Essa força  $Q$  é realmente a resultante das tensões de cisalhamento distribuídas sobre a seção vertical  $D$ . A natureza dessas tensões será estudada no Capítulo 8.

### MOMENTO FLETOR

O momento  $M$ , da Fig. 6-6(b), é chamado momento fletor na seção  $D$ . Seu valor pode ser obtido com o emprego da equação da estática que estabelece que a soma dos momentos, em relação a um ponto qualquer (e  $D$  em particular), é nula. Assim:

$$M = R_1x - P_1(x - a) - P_2(x - b).$$

O momento fletor,  $M$ , é o momento, em  $D$ , produzido por todos os esforços, ativos e reativos, que atuam naquela parte da estrutura que se conservou em equilíbrio (depois de abandonada a outra parte. Este momento deve, também ser equivalente ao momento das tensões que se distribuem pelos diversos pontos da seção  $D$ . As tensões normais, únicas, que podem solicitar a seção de forma a produzirem um binário de momento  $M$ , são de tração, em determinada parte da seção, e de compressão na outra parte. A sua distribuição será apresentada no Capítulo 8.

### FORÇA CORTANTE

A força aplicada em  $D$ , e que no caso está contida em  $D$ , recebe o nome de força cortante e se representa com a letra  $Q$ . (Se esta força inclinada, em relação à seção transversal considerada, força cortante seria a componente, contida na seção, e força normal a componente, perpendicular à seção.) No exemplo em questão, para que haja equilíbrio, é necessário que:

$$Q = R_1 - P_1 - P_2.$$

Resumindo, pode-se dizer que: momento fletor numa seção qualquer é a soma algébrica dos momentos produzidos pelos esforços externos (ativos e reativos) no centro de gravidade da seção considerada (e considerados somente os esforços externos que atuam numa das partes da estrutura, isto é, à esquerda ou à direita do corte imaginário efetuado ao longo da seção); força cortante, de maneira análoga, é a resultante

desses esforços projetada sobre a seção considerada. Os Problemas 6-1 a 6-5 relacionam-se com a determinação de momentos fletores e forças cortantes.

### CONVENÇÃO DE SINAIS

A convenção usual de sinais, para momentos fletores e forças cortantes, pode ser representada pelos diagramas da Fig. 6-7.



Fig. 6-7(a)

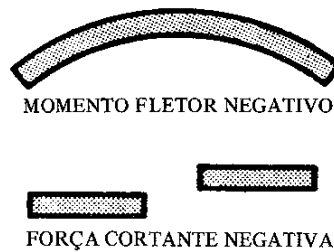


Fig. 6-7(b)

Assim, o momento fletor é positivo quando tende a fletir a viga com a concavidade para cima e negativo quando tende a imprimir-lhe concavidade para baixo (supõe-se, sempre, que a viga seja disposta horizontalmente). A força cortante é positiva quando tende a deslocar, para cima, a parte da viga que se situa à esquerda da seção considerada (em relação à parte da direita) e negativa em caso contrário.

Um processo prático de determinar este sinal algébrico é: as forças dirigidas de baixo para cima produzem momentos fletores positivos; as forças situadas à esquerda da seção produzem força cortante positiva quando dirigidas de baixo para cima, as forças situadas à direita da seção produzem força cortante positiva quando dirigidas de cima para baixo.

### EXPRESSÕES DE $Q(x)$ E $M(x)$

Freqüentemente, aparece a necessidade de determinar o momento fletor e a força cortante em todas as seções da viga. Para esse fim, podem-se localizar as diversas seções da viga, por intermédio de suas abscissas  $x$  (distâncias ao apoio da esquerda) e exprimirem-se  $Q(x)$  e  $M(x)$  em função de  $x$ .

### DIAGRAMAS DE $Q$ E $M$

A representação gráfica da função  $Q(x)$  tem o nome de diagrama das forças cortantes; as abscissas representam as diversas seções da viga e as ordenadas os valores da força cortante correspondente. Da mesma forma se traça o diagrama de momentos fletores. Esses diagramas permitem, facilmente, determinar a seção em que eles atingem seus máximos, ou se anulam; tem-se, assim, um processo prático de obter os esforços solicitantes ao longo de toda a viga.

### RELAÇÕES ENTRE A CARGA, A FORÇA CORTANTE E O MOMENTO FLETOR

Uma viga simples, carregada com uma carga variável, é ilustrada na Fig. 6-8. O sistema de coordenadas  $x$  com origem em  $A$  é estabelecido arbitrariamente. A distância de uma seção qualquer a  $A$  é chamada de  $x$ .

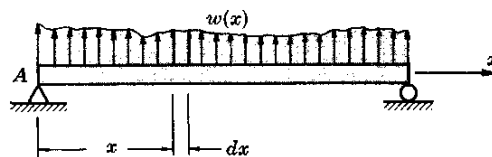


Fig. 6-8

Para qualquer valor de  $x$ , a relação entre a carga  $w(x)$  e a força cortante  $Q$  é:

$$w = \frac{dQ}{dx}$$

e a relação entre a força cortante  $Q$  e o momento fletor  $M$  é:

$$Q = \frac{dM}{dx}$$

Essas relações são deduzidas no Problema 6-7. Para aplicações, ver Problemas 6-8 até 6-20.

### FUNÇÕES SINGULARES

Para facilitar a solução de problemas que envolvem cargas concentradas e momentos concentrados, introduzimos a função:

$$f_n(x) = \langle x - a \rangle^n$$

onde, para  $n > 0$  a quantidade entre colchetes é nula se  $x < a$  e é  $x - a$  se  $x > a$ . Esta é uma função singular ou uma função de meio intervalo. Assim, se o argumento é positivo, os colchetes têm o significado de parênteses quaisquer. O Problema 6-16 ilustra essa função para certos valores de  $n$  que servem para representar os casos mais comuns de carregamentos de vigas.

### Problemas Resolvidos

- 6-1. Determinar, para a viga em balanço da Fig. 6-9(a), as expressões de  $Q$  e  $M$  (em função de  $x$ ). Traçar os diagramas correspondentes.

**Solução** — Neste caso, não é necessário determinar, de início, as reações de apoio. Considere-se o eixo dos  $x$ , com origem em  $O$ , coincidente com o eixo da viga; seu sentido é o da esquerda para a direita.

Na seção  $x$ , a força de 500 kg tende a deslocar a parte da esquerda para baixo (em relação à parte da direita), como se indica também na Fig. 6-9(b).

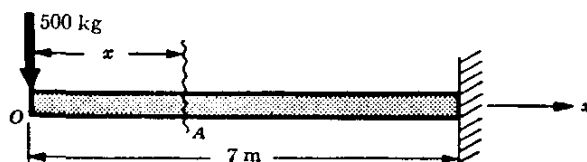


Fig. 6-9(a)



Fig. 6-9(b)

Em outras palavras, se a viga fosse cortada nessa seção  $x$ , a ação da força seria a de produzir o movimento que se indica na referida figura. A força cortante nessa seção genérica é, de acordo com a convenção de sinais que se apresentou, negativa. Seu valor é 500 kg e representa a resultante de todas as cargas que se situam à esquerda da seção considerada. Então:

$$Q = -500 \text{ kg.}$$

A convenção de sinais estabelece, também, que as forças, dirigidas de cima para baixo, produzem momento fletor negativo. O momento fletor  $M$ , na seção  $x$ , produzido pela carga de 500 kg, é o momento dessa força em relação à seção considerada. Então:

$$M = -500x$$

que, para  $x$  em metros, fornece  $M$  em  $\text{kg} \times \text{m}$ .

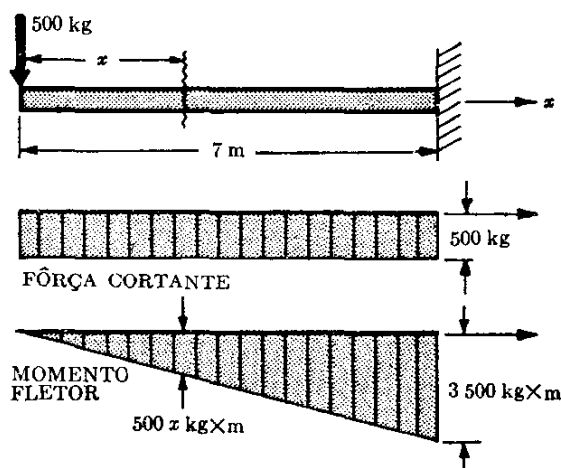


Fig. 6-10

Daí resulta que a força cortante é constante ao longo da viga, não variando com  $x$ , e é sempre negativa. Sua representação gráfica é um segmento de reta, paralelo ao eixo dos  $x$ , tendo, todos os seus pontos, a ordenada  $-500$ .

A representação gráfica de  $M$  é o trecho da reta que passa pelos pontos:  $x = 0; M = 0$  e  $x = 7 \text{ m}; y = -3 500 \text{ kg} \times \text{m}$ . Esses dois diagramas estão representados na Fig. 6-10; a ordenada, em cada ponto, fornece, respectivamente, a força cortante e o momento fletor, na seção considerada.

- 6-2. A viga em balanço da Fig. 6-11(a) está uniformemente carregada com  $q \text{ kg/m}$ . Determinar as expressões de  $Q$  e  $M$ , assim como os diagramas correspondentes.

**Solução** — Para determinar a força cortante e o momento fletor, numa seção qualquer, definida pela abscissa  $x$ , pode-se substituir a carga, que atua à esquerda da seção considerada ( $A$ ), pela sua resultante  $qx$  aplicada no meio de  $OA$ . É o que se indica na Fig. 6-11(b). Observe-se que as cargas,

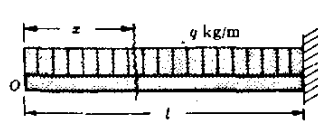


Fig. 6-11(a)

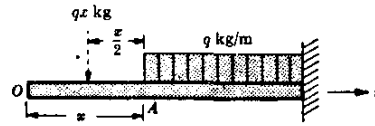


Fig. 6-11(b)

que estão à direita de  $A$ , não contribuem para o cálculo dessa resultante. Essa força tende a deslocar para baixo o trecho  $OA$ , em relação à parte restante da viga. Ela produz, portanto, força cortante negativa.

A força cortante é a resultante das forças que atuam à esquerda da seção considerada (de abscissa  $x$ ); então:

$$Q = -qx.$$



Fig. 6-11(c)



Fig. 6-11(d)

Esta equação é linear e fornece:  $Q = 0$  para  $x = 0$ ;  $Q = -ql$  para  $x = l$ . Sua representação gráfica é a da Fig. 6-11(c).

O momento fletor, nessa mesma seção  $x$ , é a soma dos momentos das forças que se situam à esquerda de  $A$ , em relação a essa seção  $A$ . Essa soma de momentos é igual ao momento da resultante,  $qx$ , em relação ao ponto  $A$ .

Então:

$$M = -qx \left( \frac{x}{2} \right) = -\frac{qx^2}{2}.$$

Seu sinal é sempre negativo, nessa viga, porque a resultante  $qx$  é sempre dirigida para baixo. A variação de  $M$  é parabólica; anula-se para  $x = 0$  e atinge o valor  $-\frac{ql^2}{2}$  quando  $x = l$ . É o que se representa na Fig. 6-11(d).

É interessante observar que a carga considerada (dirigida para baixo) conduz a um diagrama de  $M$  com a concavidade para baixo. Isto podia ser verificado com a segunda derivada de  $M$ , em relação a  $x$ , isto é:  $d^2M/dx^2 = -q$ . Sendo negativa a segunda derivada, a curva tem concavidade para baixo, de acordo com o que se estuda em Cálculo.

6-3. Determinar as equações, e os diagramas de  $Q$  e  $M$ , para a viga em balanço da Fig. 6-12(a).

**Solução** — Embora não seja necessário determinar as reações de apoio, é óbvio que, neste caso, a reação, no engastamento, consiste somente em um momento de sentido horário igual a  $200 \text{ kg} \times \text{m}$ .

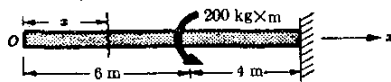


Fig. 6-12(a)

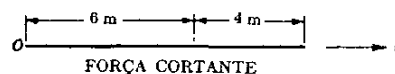


Fig. 6-12(b)

Este problema apresenta algumas características diferentes dos anteriores, visto que o momento externo não está aplicado na extremidade livre. A força cortante, numa seção qualquer da barra, é a

soma algébrica das forças verticais que atuam na parte da viga que se situa à esquerda da seção considerada. Desde que o efeito do binário não é o de força, em qualquer direção não existem forças verticais aplicadas à barra e, conseqüentemente, a força cortante é nula, para qualquer valor de  $x$ . Isto pode ser representado graficamente, no diagrama de forças cortantes, por um segmento de reta horizontal, coincidente com o eixo da viga; é o que se mostra na Fig. 6-12(b).

Para determinar a expressão de  $M$  é necessário considerar duas regiões distintas, ao longo do eixo da viga. Uma, o trecho de 6 m à esquerda do momento aplicado; a outra, o trecho de 4 m situado entre esse momento e o engastamento.

Para  $0 < x < 6$  m o momento fletor, que é a soma dos momentos das forças que se situam à esquerda da seção, em relação à seção considerada, é evidentemente nulo. Para  $6 < x < 10$  m, isto é, entre o momento externo e o engastamento, a soma dos momentos das cargas aplicadas é  $200 \text{ kg} \times \text{m}$  visto que o momento do binário é o mesmo para todos os pontos do plano. Todavia, deve-se determinar o sinal do momento fletor, levando em conta que o momento de  $200 \text{ kg} \times \text{m}$  flete a região da viga, de 6 m de comprimento, próxima do engastamento, como se mostra na Fig. 6-12(c).

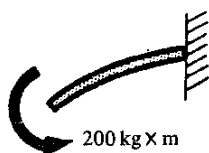


Fig. 6-12(c)

A concavidade é para baixo e, de acordo com a convenção de sinais adotada, o momento fletor é negativo.

Em resumo:

$$M = 0 \quad \text{para} \quad 0 < x < 6 \text{ m}$$

$$M = -200 \text{ kg} \times \text{m} \quad \text{para} \quad 6 < x < 10 \text{ m}.$$

Na Fig. 6-12(d) apresentam-se os correspondentes diagramas de  $Q$  e  $M$ .

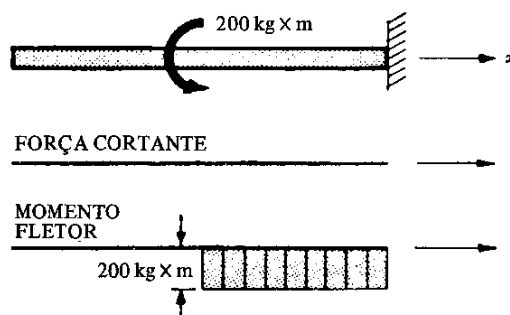


Fig. 6-12(d)

É interessante observar que numa viga em balanço, de 4 m de comprimento, solicitada pelo momento de  $200 \text{ kg} \times \text{m}$ , aplicado na sua extremidade livre, os diagramas de  $Q$  e  $M$  coincidem, respectivamente, com os da Fig. 6-12(d), na região de 4 m próxima do engastamento.

- 6-4. Determinar  $M$  e  $Q$  para a viga simplesmente apoiada da Fig. 6-13(a).

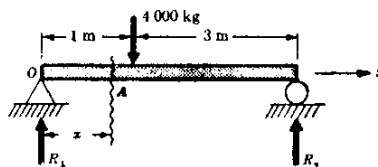


Fig. 6-13(a)

**Solução** — Neste caso, é necessário determinar, inicialmente, as reações  $R_1$  e  $R_2$ . Igualando a zero o momento de todas as forças, em relação a  $O$ , vem:

$$4 R_2 = 4\,000 \times 1$$

donde:

$$R_2 = 1\,000 \text{ kg.}$$

Igualando a zero a soma das forças verticais, vem:

$$R_1 + R_2 = 4\,000 = R_1 + 1\,000$$

donde:

$$R_1 = 3\,000 \text{ kg.}$$

Considere-se, inicialmente, o trecho à esquerda da força de 4 000 kg. A força cortante, numa seção qualquer de abscissa  $x$ , compreendida entre 0 e 1 m, coincide com a reação  $R_1 = 3\,000$  kg, única força que se situa à esquerda da seção. Esta força tende a deslocar, para cima, a parte da viga situada à esquerda da seção considerada, tal como se indica na Fig. 6-13(b). De acordo com a convenção de sinais, ela é positiva. Então:

$$Q = 3\,000 \text{ kg para } 0 < x < 1 \text{ m.}$$

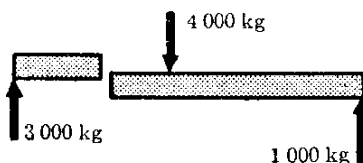


Fig. 6-13(b)

Para  $x < 1$  m, a força cortante, que é a soma algébrica das forças que atuam no trecho situado à esquerda da seção considerada, é ( $1 < x < 4$  m):

$$Q = 3\,000 - 4\,000 = -1\,000 \text{ kg.}$$

Na região situada à direita da carga de 4 000 kg, a reação da esquerda contribui com uma força cortante positiva; a força de 4 000 kg, com uma força cortante negativa; a resultante é dirigida de cima para baixo, fornecendo  $Q$  negativo. As duas expressões acima são necessárias para definir a força cortante ao longo do comprimento da viga.

Na região à esquerda da carga de 4 000 kg, o momento fletor, na seção  $x$ , é o momento de  $R_1$  em relação a  $x$ . Este momento é:

$$M = 3\,000 x \text{ para } 0 < x < 1 \text{ m}$$

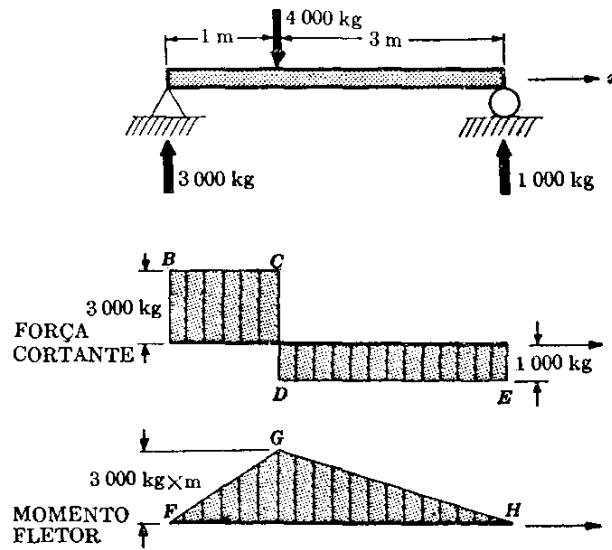


Fig. 6-13(c)

e é positivo porque a carga dirigida de baixo para cima produz momento fletor positivo. No trecho à direita da carga de 4 000 kg o momento fletor é devido, parcialmente, à reação  $R_1$  e parcialmente à carga de 4 000 kg. Este momento é:

$$M = 3\,000x - 4\,000(x - 1) \quad 1 < x < 4 \text{ m.}$$

Duas expressões são necessárias para definir o momento fletor ao longo de toda a viga.

Na Fig. 6-13(c) apresentam-se as representações gráficas dessas funções, isto é, os diagramas de  $Q$  e  $M$ , respectivamente. O diagrama de  $Q$  é formado de dois trechos de reta, horizontais; no ponto de aplicação das cargas concentradas há uma descontinuidade correspondente ao valor da carga aplicada. O diagrama de  $M$  também é constituído por dois trechos de reta mas não apresenta qualquer descontinuidade.

- 6-5. Determinar as expressões e os diagramas de  $Q$  e  $M$ , para a viga simplesmente apoiada da Fig. 6-14(a).

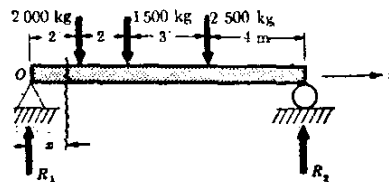


Fig. 6-14(a)

**Solução** — Inicialmente calculam-se as reações de apoio,  $R_1$  e  $R_2$ , com as equações da estática. Assim, igualando a zero o momento de todas as forças, em relação ao ponto  $O$ , vem:

$$11 R_2 - 2\,000 \times 2 - 1\,500 \times 4 - 2\,500 \times 7 = 0$$

e, igualando a zero a soma das forças verticais:

$$R_1 + R_2 - 2\,000 - 1\,500 - 2\,500 = 0.$$

Então:

$$R_2 = 2\,500 \text{ kg} \quad R_1 = 3\,500 \text{ kg.}$$

Obtidas essas reações, pode-se determinar a força cortante (unidade kg):

$$\begin{aligned} Q &= 3\,500 & 0 < x < 2 \text{ m;} \\ Q &= 3\,500 - 2\,000 = 1\,500 & 2 < x < 4 \text{ m} \\ Q &= 3\,500 - 2\,000 - 1\,500 = 0 & 4 < x < 7 \text{ m} \\ Q &= 3\,500 - 2\,000 - 1\,500 - 2\,500 = -2\,500 & 7 < x < 11 \text{ m.} \end{aligned}$$

A força cortante é constante entre duas cargas concentradas consecutivas e, na seção do apoio da direita, ela coincide com a reação, trocada de sinal. Vejamos, agora, os momentos fletores.

Partindo do apoio da esquerda, vem:

$$M = R_1 x = 3\,500 x \quad 0 < x < 2 \text{ m}$$

e, lembrando que as forças dirigidas de cima para baixo produzem momentos fletores negativos:

$$\begin{aligned} M &= 3\,500 x - 2\,000 (x - 2) & 2 < x < 4 \text{ m} \\ M &= 3\,500 x - 2\,000 (x - 2) - 1\,500 (x - 4) & 4 < x < 7 \text{ m} \\ M &= 3\,500 x - 2\,000 (x - 2) - 1\,500 (x - 4) - 2\,500 (x - 7) & 7 < x < 11 \text{ m.} \end{aligned}$$

Estas quatro expressões definem, completamente, o momento fletor ao longo da viga. Desde que essas expressões são, todas, do primeiro grau, conclui-se que o diagrama de momentos é constituído por quatro segmentos de reta. Para determiná-lo, basta que se calculem os valores de  $M$  nas seções onde existem cargas concentradas, isto é:

$$\begin{aligned} M_{x=2} &= 3\,500 \times 2 = 7\,000 \text{ kg} \times \text{m} \\ M_{x=4} &= 3\,500 \times 4 - 2\,000 \times 2 = 10\,000 \text{ kg} \times \text{m} \\ M_{x=7} &= 3\,500 \times 7 - 2\,000 \times 5 - 1\,500 \times 3 = 10\,000 \text{ kg} \times \text{m.} \end{aligned}$$

E, como nas extremidades a viga é simplesmente apoiada, o momento fletor aí é nulo.

Na Fig. 6-14(b) apresentam-se os diagramas correspondentes, de  $Q$  e  $M$ .

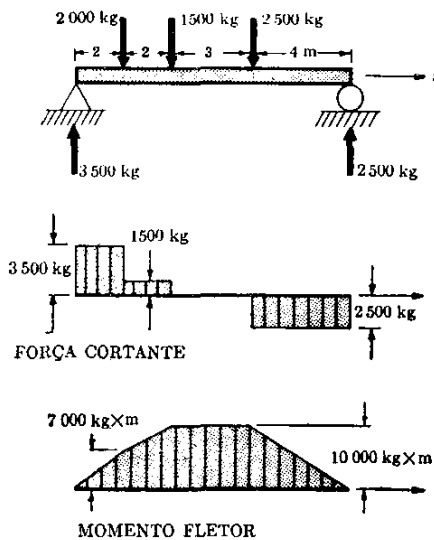


Fig. 6-14(b)

- 6-6. Determinar as expressões e os diagramas de  $Q$  e  $M$ , para a viga da Fig. 6-15(a).

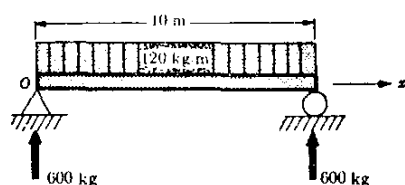


Fig. 6-15(a)

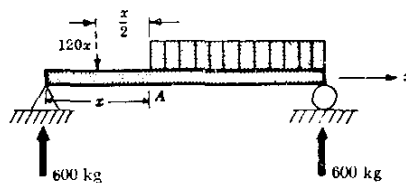


Fig. 6-15(b)

**Solução** — A carga total sobre a viga é  $120 \times 10 = 1\,200$  kg e, por simetria, cada uma das reações de apoio vale 600 kg. Considere-se, agora, a seção genérica,  $A$ , que dista  $x$  do apoio da esquerda. A força cortante nessa seção é:

$$Q = 600 - 120x$$

visto que a carga distribuída, nesse trecho de comprimento  $x$ , tem como resultante  $120x$  e é dirigida de cima para baixo. É o que se indica na Fig. 6-15(b). A expressão de  $Q$  é válida para qualquer seção da viga; ela é uma função linear que assume os valores  $Q = 600$  kg para  $x = 0$  e  $Q = -600$  kg para  $x = 10$  m; anula-se, portanto, na seção média da viga.

O momento fletor, na seção  $A$ , é:

$$M = 600x - 120x \cdot \frac{x}{2}$$

e essa expressão é válida, também, para qualquer seção da viga. Trata-se de uma parábola que se anula nas extremidades, simétrica em relação à perpendicular à viga, que passa por sua seção média e assume o valor máximo nessa seção, isto é:

$$M_{x=5} = 600 \times 5 - 120 \times 5 \cdot \frac{5}{2} = 120 \times \frac{10^2}{8} = 1\,500 \text{ kg} \times \text{m}$$

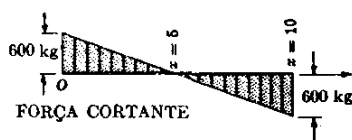


Fig. 6-15(c)

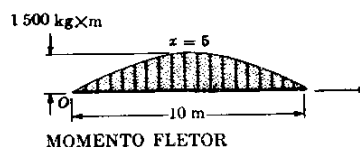


Fig. 6-15(d)

Nas Figs. 6-15(c) e 6-15(d) apresentam-se os diagramas de  $Q$  e  $M$ .

- 6-7. Deduzir as equações diferenciais que, numa viga reta, relacionam entre si o momento fletor, a força cortante e a carga aplicada, variáveis ao longo da viga.

**Solução** — Considere-se a viga da Fig. 6-16(a), carregada com a carga distribuída  $p$ , variando com  $x$ , normal ao eixo da barra. Embora essa viga seja simplesmente apoiada, as considerações que se seguem valem para viga reta. Se se isolar da viga o trecho de comprimento elementar  $dx$ , para que ele permaneça em equilíbrio e nas mesmas condições em que se encontrava, quando integrante da viga, é necessário aplicar-lhe os esforços externos que se indicam na Fig. 6-16(b). Observe-se que, por ser infinitesimal o comprimento  $dx$ , a carga que atua na borda superior da viga pode ser suposta constante e igual a  $p$  (valor de  $p$  para a abscissa considerada,  $x$ ).

Para que haja equilíbrio, é necessário que a soma dos momentos, em relação a um ponto qualquer, seja nula. Em relação ao ponto  $O$ , tem-se:

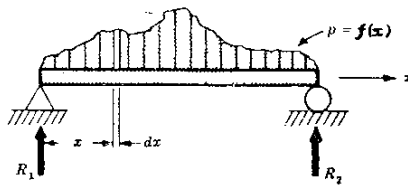


Fig. 6-16(a)

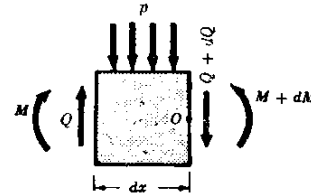


Fig. 6-16(b)

$$M - (M + dM) + Q \cdot dx - p \cdot dx \cdot \frac{dx}{2} = 0$$

ou:

$$dM = Q \, dx - p \cdot dx \cdot \frac{dx}{2}.$$

Sendo, o último termo infinitésimo de ordem superior em relação aos demais, vem:

$$\frac{dM}{dx} = Q,$$

isto é, a força cortante é a derivada do momento fletor em relação a  $x$ .

Se igualarmos a zero a soma das forças que atuam perpendicularmente à viga, isto é:

$$Q - p \cdot dx - (Q + dQ) = 0$$

vem:

$$-p \, dx = dQ$$

donde:

$$\frac{dQ}{dx} = -p = \frac{d^2M}{dx^2}.$$

Essas relações diferenciais podem auxiliar bastante no traçado dos diagramas de momentos fletores e forças cortantes. Por exemplo, se a força cortante é positiva, em determinada seção da viga, então a inclinação da tangente ao diagrama de  $M$ , nessa seção, é positiva. Se houver uma descontinuidade em  $Q$  (numa seção onde se aplica uma carga concentrada) existirão, em geral, duas inclinações da tangente ao diagrama de  $M$  (correspondentes, respectivamente, aos pontos que se situam à esquerda e à direita daquele onde se aplica a carga concentrada).

Nos pontos em que a força cortante se anular, a tangente ao diagrama de momentos é paralela ao eixo dos  $x$ ; aí o momento atinge um valor máximo ou mínimo. É o que se conclui das regras de Cálculo, para a obtenção dos máximos e mínimos de uma função. Assim, se os desenhos da Fig. 6-17

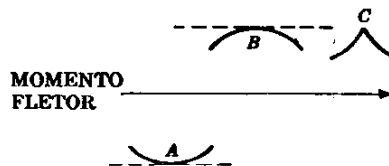


Fig. 6-17

representarem trechos de diagramas de momentos fletores, então em  $A$  e em  $B$  podem ocorrer valores críticos.

Para determinar a direção da concavidade, em um ponto tal como  $A$ , ou  $B$ , é necessário verificar a derivada segunda, isto é,  $d^2M/dx^2 = -p$ . Se a derivada segunda for positiva, o diagrama de momentos tem concavidade para cima, como em  $A$ , e o momento fletor passa por um mínimo (é máximo negativo). Se a segunda derivada for negativa, a concavidade é para baixo, como em  $B$ , e o momento fletor passa por um máximo. Supõe-se, evidentemente, que a região positiva de  $N$  seja aquela onde se situam os pontos  $B$  e  $C$  (Fig. 6-17) e a região negativa, aquela onde se situa o ponto  $A$ .

É interessante observar, porém, que o processo de determinação de máximos, ou mínimos, por intermédio da derivada, não é aplicável aos pontos angulosos, como por exemplo o ponto  $C$ . Quando isto ocorre é necessário calcular o momento em  $C$  e compará-lo com outros valores onde, possivelmente, se tenham pontos críticos.

- 6-8. Determinar, para a viga da Fig. 6-18(a), as expressões e os diagramas de  $Q$  e  $M$ .

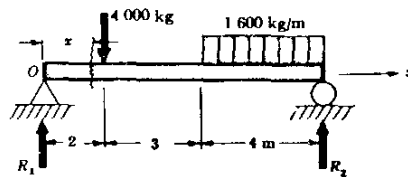


Fig. 6-18(a)

**Solução** — Calculemos, inicialmente, as reações de apoio. Com as equações da estática, vem:

$$\begin{aligned} 9 R_2 - 4\,000 \times 2 - 6\,400 \times 7 &= 0 & R_2 &= 5\,870 \text{ kg} \\ R_1 - 4\,000 - 6\,400 + 5\,870 &= 0 & R_1 &= 4\,530 \text{ kg.} \end{aligned}$$

Deve-se observar que, para a determinação das reações de apoio, é perfeitamente lícito substituir a carga distribuída, de 1 600 kg/m, pela sua resultante. Assim, aparece a carga de  $1\,600 \times 4 = 6\,400$  kg na primeira equação e, como se trata de carga uniformemente distribuída, a resultante passa pelo ponto médio do comprimento de 4 m, onde está atuando a carga distribuída.

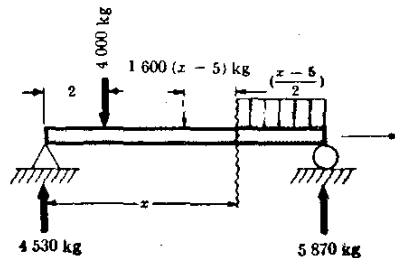


Fig. 6-18(b)

Então, obtidas as reações de apoio, vem:

$$\begin{aligned} Q &= 4\,530 & 0 < x < 2 \text{ m} \\ Q &= 4\,530 - 4\,000 & 2 < x < 5 \text{ m.} \end{aligned}$$

Para  $x$  maior que 5 m, a carga distribuída também contribui para a força cortante. Todavia, não é possível substituir toda a carga distribuída por uma força única, a sua resultante. Como estamos caminhando da esquerda para a direita, ao longo da viga, podemos substituir, pela sua resultante,

somente a parte da carga distribuída que se situa à esquerda da seção considerada. Isto é indicado, na Fig. 6-18(b), para qualquer valor de  $x$  maior que 5 m. Como a carga é de  $1\,600 \text{ kg} \times \text{m}$  e atua no comprimento  $(x - 5) \text{ m}$ , a resultante, indicada em pontilhado, é  $1\,600 (x - 5)$ . Ela atua no ponto médio do trecho uniformemente carregado, à esquerda de  $x$ .

Então:

$$Q = 4\,530 - 4\,000 - 1\,600 (x - 5) \quad 5 < x < 9 \text{ m.}$$

Nessa região a força cortante varia linearmente e assume, nas extremidades, os valores:

$$Q_{x=5} = 530 \text{ kg}$$

$$Q_{x=9} = -5\,870 \text{ kg.}$$

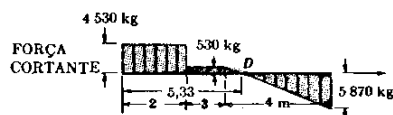


Fig. 6-18(c)

Na Fig. 6-18(c) está representado o diagrama de  $Q$ . O ponto  $D$ , onde a força cortante se anula, obtém-se de:

$$4\,530 - 4\,000 - 1\,600 (x - 5) = 0$$

isto é:

$$x = 5,33 \text{ m.}$$

Quanto aos momentos fletores, obtém-se:

$$M = 4\,530 x \quad 0 < x < 2 \text{ m}$$

$$M = 4\,530 x - 4\,000 (x - 2) \quad 2 < x < 5 \text{ m.}$$

A primeira equação fornece  $M = 0$  para  $x = 0$  e  $M = 9\,060 \text{ kg} \times \text{m}$  para  $x = 2 \text{ m}$ . A segunda equação fornece, para  $x = 5 \text{ m}$ ,  $M = 10\,650 \text{ kg} \times \text{m}$ . O diagrama de  $M$  é constituído por um segmento de reta em cada um dos trechos correspondentes, tal como se indica na Fig. 6-18(d).

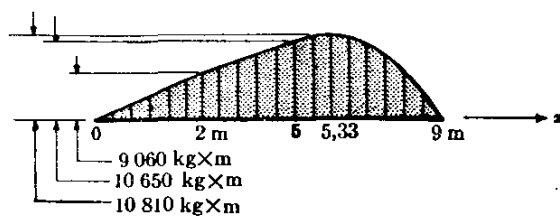


Fig. 6-18(d)

Para  $x$  maior do que 5 m valem considerações análogas às que se apresentaram no caso da determinação de  $Q$ ; tem-se, agora:

$$M = 4\,530 x - 4\,000 (x - 2) - 1\,600 (x - 5) \frac{x - 5}{2} \quad 5 < x < 9 \text{ m.}$$

Nessa região, a função  $M$  é uma parábola; isto ocorre sempre que a carga aplicada for uniformemente distribuída. Para  $x = 5 \text{ m}$  obtém-se, evidentemente, o mesmo valor  $M = 10\,650 \text{ kg} \times \text{m}$ ,

já obtido. Para  $x = 9$  m, obtém-se  $M = 0$ . É importante determinar o valor do momento para  $x = 5,33$  m onde  $Q = dM/dx = 0$ . Obtém-se:

$$M_{x=5,33} = 4\,530 \times 5,33 - 4\,000 \times 3,33 - 1\,650 \times 0,33 \frac{0,33}{2}$$

isto é:  $M_{x=5,33} = 10\,810 \text{ kg} \times \text{m}$ .

O diagrama de  $M$  é apresentado na Fig. 6-18(d). Observe-se que, para  $x = 5$ , não há descontinuidade no diagrama de  $Q$ ; há, portanto, uma só tangente, ao diagrama de  $M$ , nesse ponto.

- 6-9. A viga simplesmente apoiada, da Fig. 6-19(a), suporta, a 6 m do apoio da esquerda, o binário de momento  $M_B = 1\,000 \text{ kg} \times \text{m}$  (ou, abreviadamente, o momento  $M_B = 1\,000 \text{ kg} \times \text{m}$ ). Determinar as expressões e os diagramas de  $Q$  e  $M$ .

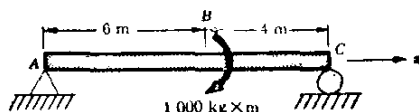


Fig. 6-19

**Solução** — Como o esforço aplicado é um binário, a única possibilidade de equilibrá-lo é por intermédio de um binário de sentido oposto. As duas reações de apoio devem, então, ser iguais e opostas, como se indica na Fig. 6-19(b); tem-se:

$$10 R = 1\,000$$

$$R = 100 \text{ kg.}$$

No trecho  $AB$ , a força cortante é:

$$Q = -100 \text{ kg}$$

$$0 < x < 6 \text{ m}$$

e o momento fletor:

$$M = -100 x$$

$$0 < x < 6 \text{ m}$$

No trecho  $BC$ , tem-se:

$$Q = -100 \text{ kg}$$

$$6 < x < 10 \text{ m}$$

e:

$$M = -100 x + 1\,000$$

$$6 < x < 10 \text{ m}$$

visto que o momento externo, como se indica na Fig. 6-19(c), tende a produzir momento fletor positivo.

Para  $x = 6$  m, esta expressão fornece  $M = 400 \text{ kg} \times \text{m}$  e, para  $x = 10$  m,  $M = 0$ . A expressão anterior fornece, para  $x = 0$ ,  $M = 0$  e, para  $x = 6$  m,  $M = -600 \text{ kg} \times \text{m}$ . Na Fig. 6-19(d) estão representados os diagramas de  $Q$  e  $M$ .

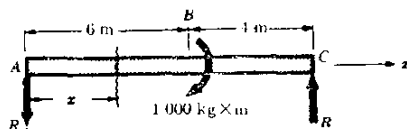


Fig. 6-19(b)

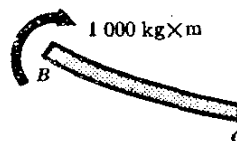


Fig. 6-19(c)

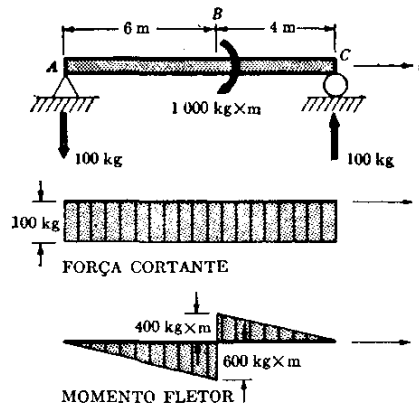


Fig. 6-19(d)

A força cortante é constante ao longo de toda a viga e o diagrama de momentos é constituído de dois segmentos de reta, paralelos, presentes pelos apoios ( $x = 0$  e  $x = 10$  m); no ponto B, de aplicação do momento externo, há uma descontinuidade, em  $M$ , igual a  $M_B = 1\,000$  kg  $\times$  m.

- 6-10. A viga da Fig. 6-20(a) suporta uma carga vertical distribuída que varia linearmente entre zero (no apoio da esquerda) e 600 kg/m (no apoio da direita). Determinar as expressões e os diagramas de  $Q$  e  $M$ .

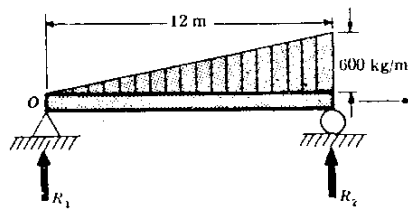


Fig. 6-20(a)

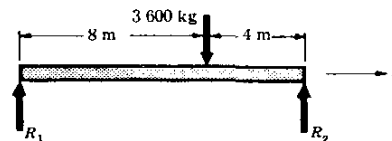


Fig. 6-20(b)

**Solução** — Para determinar as reações  $R_1$  e  $R_2$ , a carga distribuída pode ser substituída pela sua resultante, aplicada no centro de gravidade do triângulo representativo do carregamento. Essa resultante é igual à área do triângulo, isto é,  $0,5 \times 600 \times 12 = 3\,600$  kg, aplicada a  $12/3 = 4$  m do apoio da direita; é o que se indica na Fig. 6-20(b). Aplicadas as equações da estática, vem:

$$R_1 = 3\,600 \times 4/12 = 1\,200 \text{ kg e } R_2 = 3\,600 \times 8/12 = 2\,400 \text{ kg.}$$

Todavia, o carregamento da Fig. 6-20(b) não pode ser utilizado para a determinação de  $Q$  e  $M$ . É preciso considerar a carga distribuída e determinar a força cortante, e o momento fletor, em uma seção genérica, tal como se indica na Fig. 6-20(c). Na seção A, de abscissa  $x$ , a intensidade de  $p$  é (unidades: kg e m):

$$p = 600 \frac{x}{12} = 50x$$

Para determinar  $Q$  e  $M$ , na seção A, pode-se substituir a carga distribuída, que atua no comprimento  $x$ , pela sua resultante  $0,5x$  ( $50x$ ) aplicada à distância  $2x/3$  do apoio da esquerda; é o que se indica na Fig. 6-20(c). Então:

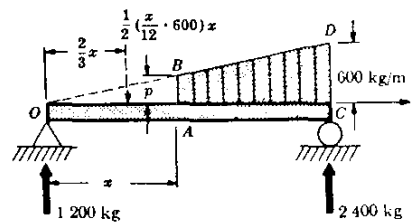


Fig. 6-20(c)

$$Q = 1\,200 - 0,5x(50x) = 1\,200 - 25x^2$$

$$M = 1\,200x - 0,5x(50x)\frac{x}{3} = 1\,200x - \frac{25}{3}x^3$$

Essas expressões valem para qualquer valor de  $x$ , ao longo da viga. A força cortante, em função de  $x$ , é uma parábola que assume o valor 1 200 kg para  $x = 0$  e - 2 400 kg para  $x = 12$  m. O momento fletor é uma parábola cúbica, que se anula nas extremidades e atinge seu máximo onde  $Q$  se anula. Este ponto é a solução de:

$$1\,200 - 25x^2 = 0$$

isto é:

$$x = 6,94 \text{ m.}$$

Para esse valor de  $x$ , o momento fletor, que é o valor máximo, vale:

$$1\,200 \times 6,94 - \frac{25}{3} \times 6,94^3 = 5\,520 \text{ kg} \times \text{m.}$$

Na Fig. 6-20(d) apresentam-se os diagramas de  $Q$  e  $M$ .

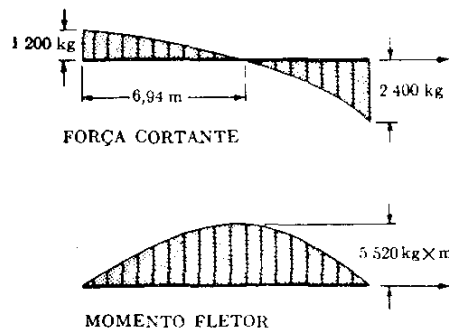


Fig. 6-20(d)

- 6-11. A viga  $ABC$ , da Fig. 6-21(a), é apoiada em  $B$  e  $C$  e suporta o momento  $1\,600 \text{ kg} \times \text{m}$  aplicado em  $A$ . Determinar as expressões e os diagramas de  $Q$  e  $M$ .

**Solução** — Na Fig. 6-21(b) indicam-se os esforços externos que atuam na barra  $AC$ , admitidos, para as reações, os sentidos arbitrariamente fixados que se indicam na figura. De acordo com as equações de equilíbrio da estática, vem:

$$1\,600 - 6R_c = 0$$

$$R_c = 267 \text{ kg}$$

$$-R_B + 267 = 0$$

$$R_B = 267 \text{ kg.}$$

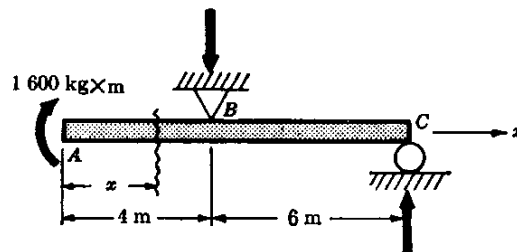


Fig. 6-21

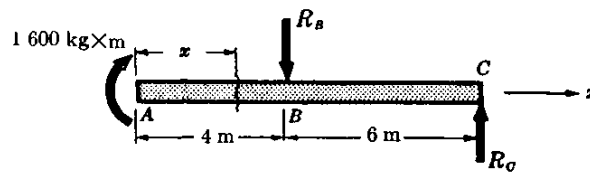


Fig. 6-21(b)

Como as duas reações obtidas são positivas, isto quer dizer que os sentidos admitidos são os reais.

No trecho AB, tem-se:

$$Q = 0$$

$$M = 1\,600 \text{ kg} \times \text{m}$$

e, para  $x$  maior do que 4 m (trecho BC):

$$Q = -R_B = -267 \text{ kg}$$

$$M = 1\,600 - R_B(x - 4) = 1\,600 - 267(x - 4).$$

Os diagramas de  $Q$  e  $M$  são apresentados na Fig. 6-21(c). Observe-se que o diagrama de momentos fletores, na região BC, pode ser obtido, de maneira mais simples, com a introdução de uma nova

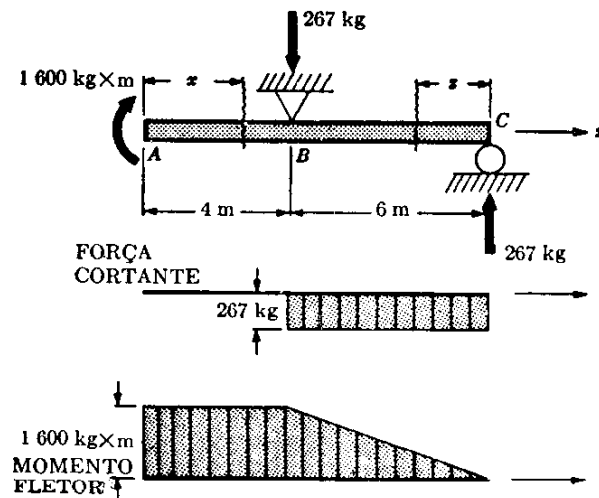


Fig. 6-21(c)

coordenada,  $z$ , com origem em  $C$  e contada da direita para a esquerda. Obtém-se o momento fletor considerando-se o momento das forças que se situam à direita da seção de abscissa  $z$ . Tem-se:

$$M = 267z \quad 0 < z < 6 \text{ m}$$

que é positivo porque as forças dirigidas de baixo para cima produzem momentos fletores positivos. Em muitos casos, a consideração das forças que atuam à direita da seção, em lugar de à esquerda, conduz ao resultado procurado de maneira mais simples.

6-12. Determinar, para a viga da Fig. 6-22(a), as expressões e os diagramas de  $Q$  e  $M$ .

**Solução** – As reações de apoio determinam-se com as equações da estática:

$$1\,000 \times 2 + R_D \times 7 - 2\,400 \times 4 - 1\,500 \times 10 = 0$$

$$R_B + R_D - 1\,000 - 2\,400 - 1\,500 = 0$$

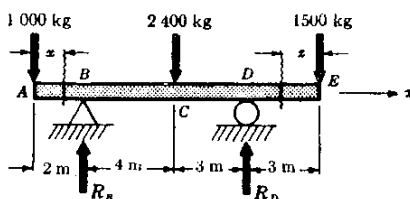


Fig. 6-22(a)

que fornecem  $R_D = 3\,230 \text{ kg}$  e  $R_B = 1\,670 \text{ kg}$ , respectivamente. Na primeira equação estabeleceu-se que a soma dos momentos, em relação ao ponto  $B$ , fosse nula e, na segunda, que a soma das forças verticais se anulasse.

De acordo com a definição de força cortante, tem-se:

$$Q = -1\,000 \text{ kg} \quad 0 < x < 2 \text{ m}$$

$$Q = -1\,000 + 1\,670 = 670 \text{ kg} \quad 2 < x < 6 \text{ m}$$

$$Q = -1\,000 + 1\,670 - 2\,400 = -1\,730 \text{ kg} \quad 6 < x < 9 \text{ m}$$

$$Q = -1\,000 + 1\,670 - 2\,400 + 3\,230 = 1\,500 \text{ kg} \quad 9 < x < 12 \text{ m}$$

A força cortante é constante em cada um dos quatro trechos considerados; em cada ponto de aplicação de carga concentrada, inclusive as reações, há uma descontinuidade no diagrama de  $Q$ , como se mostra na Fig. 6-22(b); esta descontinuidade é igual ao valor da carga concentrada correspondente.

Os momentos fletores são (em  $\text{kg} \times \text{m}$ ):

$$M = -1\,000x \quad 0 < x < 2 \text{ m}$$

$$M = -1\,000x + 1\,670(x - 2) \quad 2 < x < 6 \text{ m}$$

$$M = -1\,000x + 1\,670(x - 2) - 2\,400(x - 6) \quad 6 < x < 9 \text{ m}$$

$$M = -1\,500x \quad 0 < z < 3 \text{ m}$$

quando se adotam as unidades  $\text{kg}$  e  $\text{m}$  e se contam as abscissas  $z$  com origem em  $E$  e da esquerda para a direita.

Os diagramas de  $Q$  e  $M$  são os que se indicam na Fig. 6-22(b). Observe-se que o diagrama de  $M$ , formado de quatro segmentos de reta, não apresenta descontinuidades, mas pontos angulosos, nas seções onde se aplicam cargas concentradas.

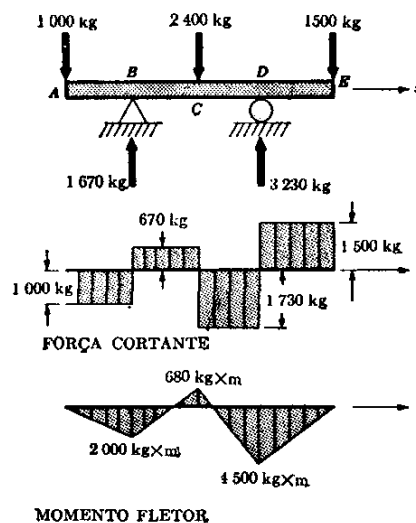


Fig. 6-22(b)

Nas regiões  $BC$  e  $DE$ , onde a força cortante é positiva, a inclinação da reta do diagrama de  $M$  também é positiva; nas outras regiões, onde  $Q$  é negativa, também é negativa a inclinação da reta representativa de  $M$ . É o que deveria ocorrer, pois  $Q = dM/dx$ .

6-13. Determinar as expressões e os diagramas de  $Q$  e  $M$ , para a viga da Fig. 6-23(a).

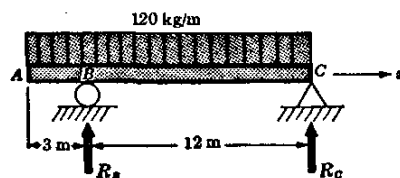


Fig. 6-23(a)

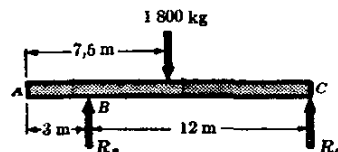


Fig. 6-23(b)

**Solução** — Para o cálculo das reações de apoio, a carga uniformemente distribuída pode ser substituída pela sua resultante,  $120 \times 15 = 1\,800$  kg, aplicada a 7,5 m de distância do ponto A. É o que se indica na Fig. 6-23(b). Aplicando-se as equações de equilíbrio da estática, vem:

$$R_C \times 12 - 1\,800 \times 4,5 = 0$$

$$R_B + R_C - 1\,800 = 0$$

donde:

$$R_C = 675 \text{ kg}$$

$$R_B = 1\,125 \text{ kg.}$$

Para determinar a força cortante, numa seção qualquer do trecho  $AB$ , definida pela abscissa  $x$ , indicada na Fig. 6-23(c), pode-se substituir a carga que atua no trecho de comprimento  $x$  pela sua resultante  $120x$  aplicada à distância  $0,5x$  do ponto A. Então:

$$Q = -120x \quad 0 < x < 3 \text{ m.}$$

Para  $x = 3$  m tem-se  $Q = -360$  kg; a força cortante varia linearmente, nesse trecho, como se indica no diagrama da Fig. 6-23(e).

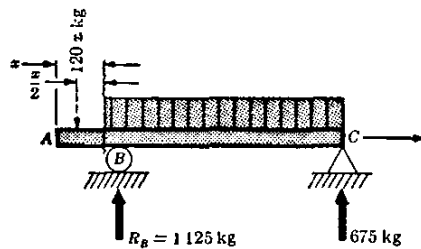


Fig. 6-23(c)

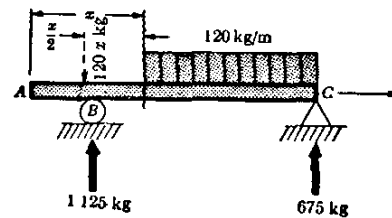


Fig. 6-23(d)

O momento fletor (observe-se que as unidades empregadas são o kg e o m):

$$M = -120x \cdot \frac{x}{2} \quad 0 < x < 3 \text{ m}$$

varia segundo uma parábola. Para obter a direção da concavidade, do diagrama de  $M$ , calculamos a derivada segunda de  $M$ , isto é:

$$\frac{d^2M}{dx^2} = \frac{dQ}{dx} = -p = -120 \quad 0 < x < 3 \text{ m.}$$

Sendo negativa esta segunda derivada, isto indica que a concavidade da curva é para baixo.

Quando  $x$  é maior do que 3 m, a reação de 1125 kg também produz força cortante e momento fletor. Assim, de acordo com o que se indica na Fig. 6-23(d):

$$Q = -120x + 1125$$

$$M = -120x \cdot \frac{x}{2} + 1125(x - 3)$$

para  $x$  compreendido entre 3 e 15 m. A força cortante varia linearmente e assume os valores de 765 kg e -675 kg, respectivamente, para  $x = 3 \text{ m}$  e  $x = 15 \text{ m}$ . A expressão de  $M$ , que é a de uma

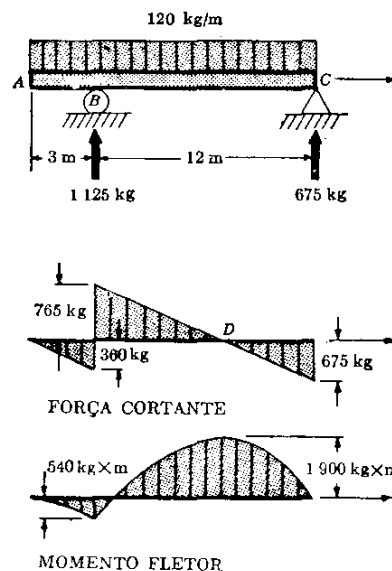


Fig. 6-23(e)

parábola, fornece o valor  $-540 \text{ kg} \times \text{m}$  para  $x=3 \text{ m}$  e se anula para  $x=15 \text{ m}$ . Sendo  $d^2M/dx^2 = -120$ , também nesse trecho, a concavidade do diagrama de  $M$  é para baixo.

Os diagramas de  $Q$  e  $M$  estão indicados na Fig. 6-23(e).

Para determinar o máximo  $M$  calculamos, inicialmente, a seção onde  $Q=0$ , isto é:

$$-120x + 1125 = 0$$

donde:

$$x = 9,38 \text{ m.}$$

Isto determina o ponto  $D$ . Como  $Q = dM/dx$ , a tangente ao diagrama de  $M$ , na seção  $D$ , é horizontal. O momento fletor, nessa seção, é:

$$-60 \times 9,38^2 + 1125(9,38 - 3) = 1900 \text{ kg} \times \text{m}$$

e corresponde ao máximo procurado.

A equação  $Q = dM/dx$  mostra que nas regiões  $AB$  e  $DC$ , onde a força cortante é negativa, a tangente ao diagrama de  $M$  tem inclinação negativa. Em  $BD$ , onde a força cortante é positiva, a inclinação da tangente é positiva. Como a força cortante varia bruscamente, em  $B$ , a inclinação da tangente ao diagrama de  $M$  varia, também, bruscamente, em  $B$ . Não há uma tangente única, em  $B$ , para as duas parábolas que constituem o diagrama de momentos fletores. O emprego criterioso da equação  $Q = dM/dx$  permite, muitas vezes, traçar o diagrama de  $M$  só com o cálculo de alguns valores dessa curva.

- 6-14. A viga da Fig. 6-24(a) suporta a carga uniformemente distribuída de  $400 \text{ kg/m}$  e a carga concentrada de  $3000 \text{ kg}$ . Determinar o diagrama de forças cortantes e, parceladamente, o diagrama de momentos fletores.

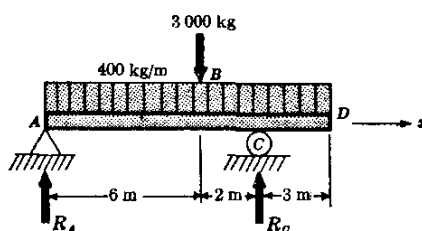


Fig. 6-24(a)

**Solução** — As equações da estática fornecem:

$$8R_C - 3000 \times 6 - 400 \times 11 \times 5,5 = 0$$

$$R_A + R_C - 3000 - 400 \times 11 = 0$$

donde, respectivamente,  $R_C = 5275 \text{ kg}$  e  $R_A = 2125 \text{ kg}$ .

Para as forças cortantes, tem-se (unidades  $\text{kg e m}$ ):

$$Q = 2125 - 400x \quad 0 < x < 6 \text{ m} \quad (1)$$

$$Q = 2125 - 400x - 3000 \quad 6 < x < 8 \text{ m} \quad (2)$$

$$Q = 2125 - 400x - 3000 + 5275 \quad 8 < x < 11 \text{ m} \quad (3)$$

A equação (1) fornece, para  $x = 0$ , o valor 2 125 kg e, para uma seção próxima de  $B$  (mas à esquerda), isto é, para  $x = 6$  m, tem-se o valor  $- 275$  kg. A força cortante, imediatamente à direita de  $B$ , obtém-se com  $x = 6$  m na equação (2), isto é, tem o valor 3 000 kg.

A força cortante à esquerda de  $C$  é:

$$2\,125 - 400 \times 8 - 3\,000 = -4\,075 \text{ kg}$$

e, à direita de  $C$ :

$$2\,125 - 400 \times 8 - 3\,000 + 5\,275 = 1\,200 \text{ kg}.$$

As três expressões de  $Q$ , acima apresentadas, são todas lineares. Nos pontos  $A$  e  $D$ , respectivamente, a força cortante vale 2 125 kg e zero. Nessas condições, o diagrama de forças cortantes, ao longo da viga, é o que se indica na Fig. 6-24(b).

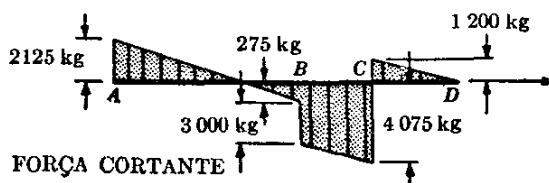


Fig. 6-24(b)

O diagrama de momentos fletores será determinado, agora, de maneira diferente da que temos utilizado. O processo consiste em considerar, separadamente, cada uma das cargas e admitir que cada uma delas atue sem as demais. Diz-se, então, que assim se determina, parceladamente, o diagrama de  $M$ . Veremos que o processo, para a resolução de alguns problemas relativos à flexão de vigas, pode ser muito vantajoso. Ao assunto voltaremos mais tarde.

Vejamos, separadamente, o efeito da reação  $R_A$ , da carga uniforme, da carga concentrada, de 3 000 kg e da reação  $R_C$ . Numa seção qualquer, distante  $x$  do apoio  $A$ , o momento fletor, devido a  $R_A$ , é  $2\,125 x \text{ kg} \times \text{m}$  (adota-se, para as forças, a unidade kg e, para as distâncias, m). Essa expressão é linear, anula-se para  $x = 0$  e fornece, para  $x = 11$  m, o valor  $23\,375 \text{ kg} \times \text{m}$ . É o diagrama que se representa na Fig. 6-24(c).

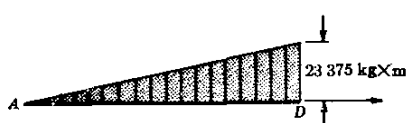


Fig. 6-24(c)

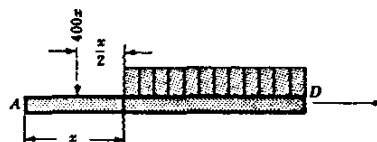


Fig. 6-24(d)

Considere-se, agora, a carga distribuída. De acordo com o que se indica na Fig. 6-24(d), o momento fletor, devido só a essa carga, é:

$$M = -400 x \cdot \frac{x}{2}.$$

Essa expressão, do segundo grau, anula-se para  $x = 0$  e assume o valor  $-24\,000 \text{ kg} \times \text{m}$  para  $x = 11$  m. Esse diagrama é o que se apresenta na Fig. 6-24(e). Quanto à carga concentrada, de 3 000 kg, ela só produz momento fletor à direita de  $B$ , isto é, para  $x$  maior do que 6 m. Ela produz:

$$M = -3\,000 (x - 6) \quad 6 < x < 11 \text{ m}$$

que é uma expressão linear que se anula para  $x = 6$  m e fornece  $M = -15\,000 \text{ kg} \times \text{m}$  para  $x = 11$  m.