

A invenção da

geometria

Na Grécia, no século IV a.C., época de Platão e Aristóteles, a geometria desfrutava do estatuto de disciplina.

Nas décadas anteriores, sua origem já era alvo de controvérsias

Por Bernard Vitrac

A entrada de Hipócrates de Chios no mundo da geometria ocorreu quando ele perdeu todos os bens por causa de um ataque-surpresa de piratas a seu navio. Enquanto estava em Atenas para dar queixa contra os salteadores, ele frequentou reuniões de filósofos e passou a investigar a polêmica da quadratura do círculo (*ver texto na pág. 36*). Não conseguiu descobri-la, mas ao fazer o enquadramento da lúnula, acreditou erroneamente que daí pudesse partir para desvendar o desafio.

Tal é o relato transmitido por João Filopono, incansável comentarista de Aristóteles no século VI de nossa era. O episódio, se for real, deu-se quase mil anos antes, por volta de 440 a.C. O próprio Aristóteles relatou, no século IV a.C., uma versão um pouco diferente: “Hipócrates, ainda que tenha sido um eminente geômetra, ao que tudo indica era ingênuo e estúpido para todo o resto. Em uma viagem marítima, deixou-se lesar em uma grande soma pelos receptores da taxa do quinquagésimo em Bizâncio”.

Essa história mostra uma situação bastante comum: a distração ou a inade-



TALES DE MILETO, ilustração do livro *Veterum et Recentium Medicorum Philosophorumque Icones* (1574), de Johannes Sambucus

quação social dos matemáticos. Na época de Hipócrates – segunda metade do século V a.C. – houve o surgimento de “especialistas”, sobretudo geômetras: esses homens, ao contrário das figuras alçadas à condição de pais fundadores (Tales de Mileto, Anaximandro, Pitágoras...), já não eram filósofos universais.

Para o leitor moderno, o relato de Filopono traz uma série de afirmações que, em-

bora estranhas, não deixam de ser interessantes. Hipócrates teria se tornado geômetra em Atenas graças ao tempo em que lá permaneceu em virtude de uma pendência jurídica. Antes, fora mercador (o mesmo se dizia de Tales). Havia naquela época mestres em geometria – Filopono os chamava de “filósofos” – na cidade de Péricles, que se orgulhava de ser a “escola da Grécia”.

Outro traço igualmente curioso, conforme o relato de Aristóteles, é que Hipócrates não foi lesado em uma determinada quantia, mas teria perdido todos os bens. O detalhe não é isento de importância. No século III de nossa era, o neopitagórico Jâmblico escreveu uma suma sobre o antigo pitagorismo em dez livros, nos quais tentava mostrar que tudo o que era bom em filosofia e nas ciências provinha dos pitagóricos, quando não do próprio Pitágoras. Uma vez que Pitágoras nada escreveu, mas tudo descobriu, sobretudo na geometria, era o caso de explicar como essa ciência, privilégio de um círculo secreto de discípulos, teria sido transmitida ao comum dos mortais.

Havia duas suposições: de que um certo Hipásio havia divulgado de maneir-



A **ESCOLA DE ATENAS**, afresco de Rafael, pintado em 1509 na Sala da Assinatura, no Vaticano. Ao centro aparecem Platão e Aristóteles, simbolizando a oposição entre idealismo e realismo. À esquerda, Pitágoras (com livro), representando a aritmética

ra fraudulenta resultados importantes; ou de que ele havia designado um dos membros da confraria (de nome não revelado) – e que aliás perdeu todos os bens – para que ganhasse a vida ensinando geometria. Filopono inspirou-se nessa idéia, que era defendida pelos próprios pitagóricos, como conta Jâmblico, e propôs que Hipócrates tenha sido tal geômetra. Para os dois autores, isso explicava como a geometria se tornava um composto de ensinamentos, compreendendo-se o que era ministrado pelos sofistas e seus congêneres, mediante pagamento.

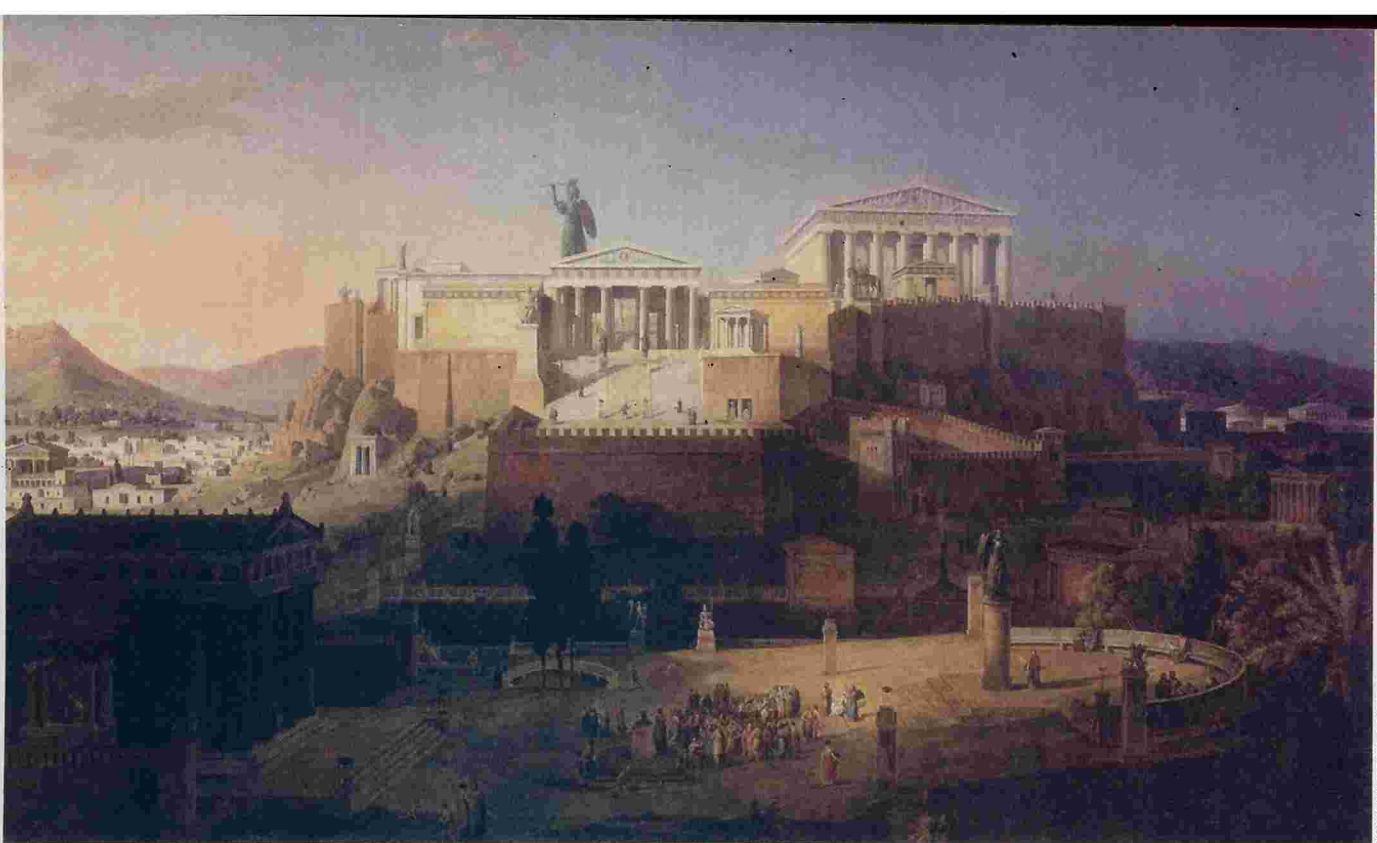
Aliança Ateniense

Há que se questionar: por que um nativo da pequena ilha de Chios teria recorrido a um tribunal ateniense para reclamar sobre um ataque de piratas

(seriam eles atenienses?) ou uma trapaça qualquer em Bizâncio? Na verdade, o acontecimento não é tão inverossímil. Em meados do século V a.C., os gregos viviam sob diferentes formas de organização política, dentre as quais a mais célebre foi a cidade-estado. É certo que as oligarquias reservavam os poderes a um número bem reduzido. Outros procuravam fazer com que o corpo cívico participasse de diferentes cargos políticos ou, pelo menos, que tentassem garantir a igualdade jurídica entre os cidadãos: é o caso das democracias. A própria Atenas se descreve como uma meritocracia democrática, na qual eram combinados eleição (para os cargos que exigem certas competências, como a da estratégia, por exemplo) e sorteio (para funções como a do júri popular).

Sem dúvida, por iniciativa de Péricles, na época essas definições ocorriam mediante pagamento, o que permitia aos cidadãos, mesmo de condição modesta, participar da vida política. Assembléia do povo, conselhos e tribunais eram os principais locais de exercício da política.

Ocorre que nem tudo era um mar de rosas, mesmo no roseiral da democracia ateniense: tais direitos eram cativos de uma minoria de seus habitantes. Em 431 a.C., em Atenas, a mais importante das cidades democráticas, os cidadãos – indivíduos do sexo masculino e com 18 anos ou mais, no desfrute de seus direitos cívicos e residentes na Ática – mal chegavam a representar 10% da população total do território, possivelmente 400 mil habitantes: enquanto só os cidadãos participavam da vida política da cidade,



NOVA PINACOTECA, MUNIQUE

A ACRÓPOLE DE ATENAS, berço grego da geometria, na pintura de 1846 de Leo von Klenze

os estrangeiros ali residentes ou escravos realizavam as atividades econômicas (como agricultura, por exemplo). Esses eventualmente eram prisioneiros de guerra, ou pessoas pobres subjugadas à servidão em razão de endividamento. O desenvolvimento da escravidão-mercadoria fez-se assim o correlato da democracia.

As instituições financeiras necessitavam de importantes meios financeiros, tanto que na mesma época os atenienses se lançaram em um programa de trabalhos de grande porte, como fortificações, emadeiramento dos portos do Pireu, grandes santuários etc. É possível que Hipócrates tenha visto o estaleiro do Partenon: sua construção, iniciada em 447, demandou quase dez anos. Atenas utilizou os recursos naturais de seu território, sobretudo as ricas minas de prata. Sua brilhante participação nas guerras contra o Império Persa também lhe rendeu prestígio: após as vitórias dos anos 480-479 a.C., na sequência da retirada de Esparta e de seus aliados, os atenienses organizaram uma aliança, a liga chamada “de Delos”, reputada como defensora de seus membros contra os persas, que logo, porém,



A CONSTITUIÇÃO de Chios, uma das primeiras cidades a estabelecer instituições democráticas. Foi também uma das primeiras a praticar a escravidão em grande escala. Esta escrita é “bostrofédica”, isto é, como “o trajeto do boi a arar”: uma linha que vai da esquerda para a direita, e depois outra, da direita para a esquerda, e assim por diante. Não havia espaçamento entre as palavras, nem pontuação, nem acentuação

se tornou o instrumento da hegemonia marítima ateniense no mar Egeu.

A cidade de Hipócrates, Chios, foi uma das principais aliadas de Atenas. Incrustada na ilha de mesmo nome, a alguns quilômetros da costa da atual Turquia, era uma das cidades mais ricas. Foi também uma das primeiras a possuir instituições democráticas e a recorrer à escravidão-mercadoria. A exemplo de todos os outros, os cidadãos de Chios se beneficiavam de um privilégio jurídico de Atenas: podiam pleitear certas causas naquele tribunal. Portanto, a diligência de Hipócrates em Atenas não seria procedimento nem um pouco absurdo. Acresce-se que a própria Bizâncio pertencia à liga de Delos.

Todavia, em 440 a.C., no momento em que a cidade de Samos, outro importante membro da liga, se revoltou contra a hegemonia ateniense, Bizâncio perfilou-se junto a ela, enquanto Chios se manteve fiel a sua aliança. A relação entre os habitantes das duas cidades, entretanto, não se tornaria muito cordial, o que só corrobora a anedota de Aristóteles.

Nada permite optar entre as versões de Aristóteles e de Filopono, nem tampouco completar o retrato de Hipócrates que am-

bas só esboçaram. É comum essa desinformação. Nenhum autor da Antiguidade teve o bom senso de reunir a biografia dos grandes geômetras, por mais que o tenham feito para os filósofos, oradores, sofistas, políticos e grandes estrategistas. Mesmo para essas categorias, o exercício consistia muito mais em sacramentar a memória de um grande homem retendo os episódios de sua vida – ou suas frases lapidares – do que em apresentar a obra real do personagem. Da mesma forma, anedotas que apresentavam geômetras, para além dos detalhes inverificáveis nelas contidos, visavam a edificação ou a polêmica.

Origem da Ciência

No entanto, a história das ciências e das técnicas – ou, tanto mais, o relato de seus começos – fascinou os antigos, fossem eles historiadores, autores trágicos atenienses (Ésquilo e Sófocles, no século V a.C.), médicos ou sofistas. Todos tinham na invenção técnica e nas descobertas científicas balizas importantes para o desenvolvimento da civilização. Essa maestria das artes e ciências caracteriza a espécie humana. Se, tradicionalmente, essas invenções estavam relacionadas a uma divindade ou a um herói civilizador, o discurso histórico privilegiado das explicações de modo algum fazia apelo ao sobrenatural. Como a Grécia era uma civilização recente cercada de culturas antigas, há quem defenda que a maior parte das técnicas e das ciências teriam sido descobertas por outros povos, em especial por egípcios, fenícios e babilônios, para depois serem emprestadas pelos gregos (e evidentemente aperfeiçoadas por eles). A tomada da escrita (aprendida com os fenícios) e da tradição astronômica de origem babilônica, é confirmada pela pesquisa moderna.

No tocante à origem da geometria, a explicação mais aceita foi proposta pelo historiador Heródoto de Halicarnasso, no segundo dos nove livros de sua *Enquete* (século V a.C.). Ele narra as guerras entre os gregos e os bárbaros (os povos do Império Persa) e investiga suas causas próximas

e longínquas, o que lhe permite descrever os costumes e as instituições dos povos.

Por volta do ano 445, Heródoto fez uma leitura pública de sua obra em Atenas. Segundo algumas fontes, seu êxito foi tamanho que os atenienses o agraciaram com uma recompensa oficial considerável. O livro II é dedicado ao Egito. Ele traz a mais antiga menção da palavra grega “geometria” (dita por Heródoto) a ter chegado aos nossos dias. Os sacerdotes egípcios contaram a Heródoto que o rei Sesóstris dividia o solo entre todos, atribuindo um lote igual a cada um e prescrevendo que cada detentor passaria a lhe dever um tributo anual com base nessa repartição. Contudo, vez por outra o Nilo lhes arrancava parte de um lote. O pro-

tras técnicas cuja invenção resulta da vontade de reduzir as insuficiências da condição humana: a gramática teria surgido para se antepor às mudanças ocorridas com o passar do tempo na língua, perfeita em sua origem. Da mesma forma, doenças e ferimentos teriam tornado necessária a medicina. No caso da agrimensura egípcia, havia o risco de injustiça fiscal. A correlação entre matemáticas, números, equilíbrio e justiça, entre direito e cálculo era comum nas sociedades antigas.

A força da descrição de Heródoto é etimológica: “geometria” constitui-se do prefixo “geo”, derivando de “gê”, a terra, e do verbo “métrein”, “medir”. Daí a equação:

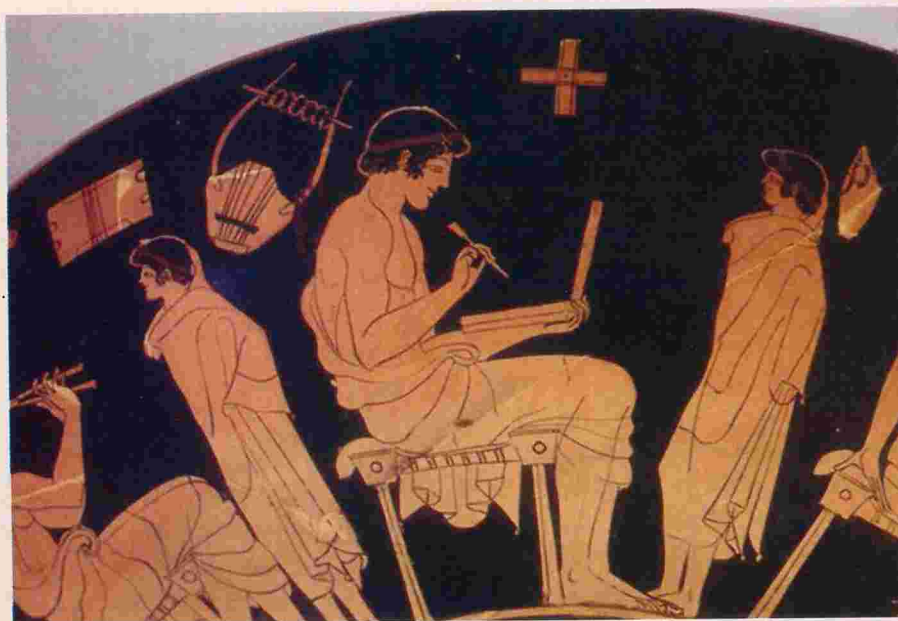


MUNDO GREGO ANTIGO

prietário prejudicado ia então ao encontro do soberano, que averiguava quanto do terreno diminuía para então providenciar um abatimento proporcional no tributo a ser pago. Ao que tudo indica, concluía Heródoto, foi isso que ensejou o nascimento da geometria. Ele acrescenta que os gregos – sem afirmar quais – transmitiam uns aos outros esse conhecimento.

O mesmo modelo intelectual foi utilizado para descrever a origem de ou-

“geometria = medida da terra”, e a ideia de que ela teria nascido da agrimensura. Bem entendido, não seria admissível que Heródoto omitisse o nome de um ou mais gregos que teriam trazido a geometria para a Hélade. Mas a tradição se encarregou de preencher essa “lacuna”: Proclo de Constantinopla, provavelmente seguindo o rastro de Eudemo de Rodas, afirma tratar-se de Tales. Outros autores não ficam atrás, e contam de que modo, em Mileto, Tales te-



PINTURA EM vaso retrata cenas da educação grega: o estudo da escrita, em que o aluno utiliza tábua de argila ou cera, e o ensino da música, em que professor e aluno tocam lira

STATLICHE MUSEEN, BERLIN

ria medido a altura da grande pirâmide. É bem hábil a anedota: combina a idéia de que a geometria é de origem egípcia, como queria Heródoto, com a afirmação de que Tales seria o primeiro sábio grego, como sustentam os aristotélicos, e a sugestiva tese de que há uma ligação entre geometria e determinação indireta das distâncias inacessíveis.

Há ainda outras explicações da origem da geometria. Em sua peça *Nuvens* (da qual os personagens são Sócrates e seus discípulos), Aristófanes, o célebre poeta cômico ateniense – além de Heródoto, o

único do século V a.C. a chegar até nós com alguma referência à palavra “geometria” – confere outra interpretação: ela seria a medida de toda a terra habitada, e não do pequeno território distribuído em lotes em uma colônia. A tradição grega antiga remonta essa “geo-metria” – outros a chamariam “geo-grafia” – a Anaximandro de Mileto (século VI a.C.). A partir dessa época, passaram a existir duas maneiras de se dar conta do desenvolvimento da geometria: ressalta-se a sua modesta origem empírica, a agrimensura, e ao mesmo tem-

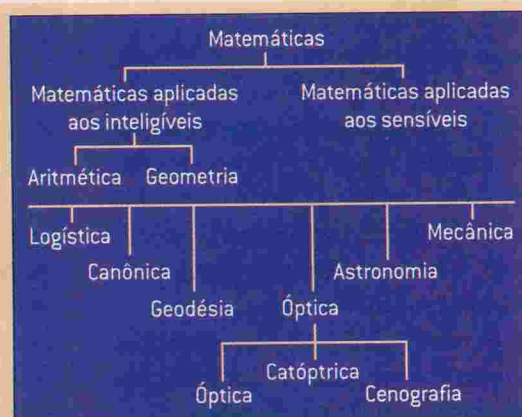
po a sua implicação nas pesquisas mais especulativas de uma pesquisa da natureza – estrutura (geométrica) do Cosmo, descrição e mapeamento do mundo habitado. Esse duplo aspecto do emprego da geometria, ciência prática ou disciplina independente, com seus adeptos sendo praticantes “da arte pela arte”, teriam prolongamentos até nossos dias.

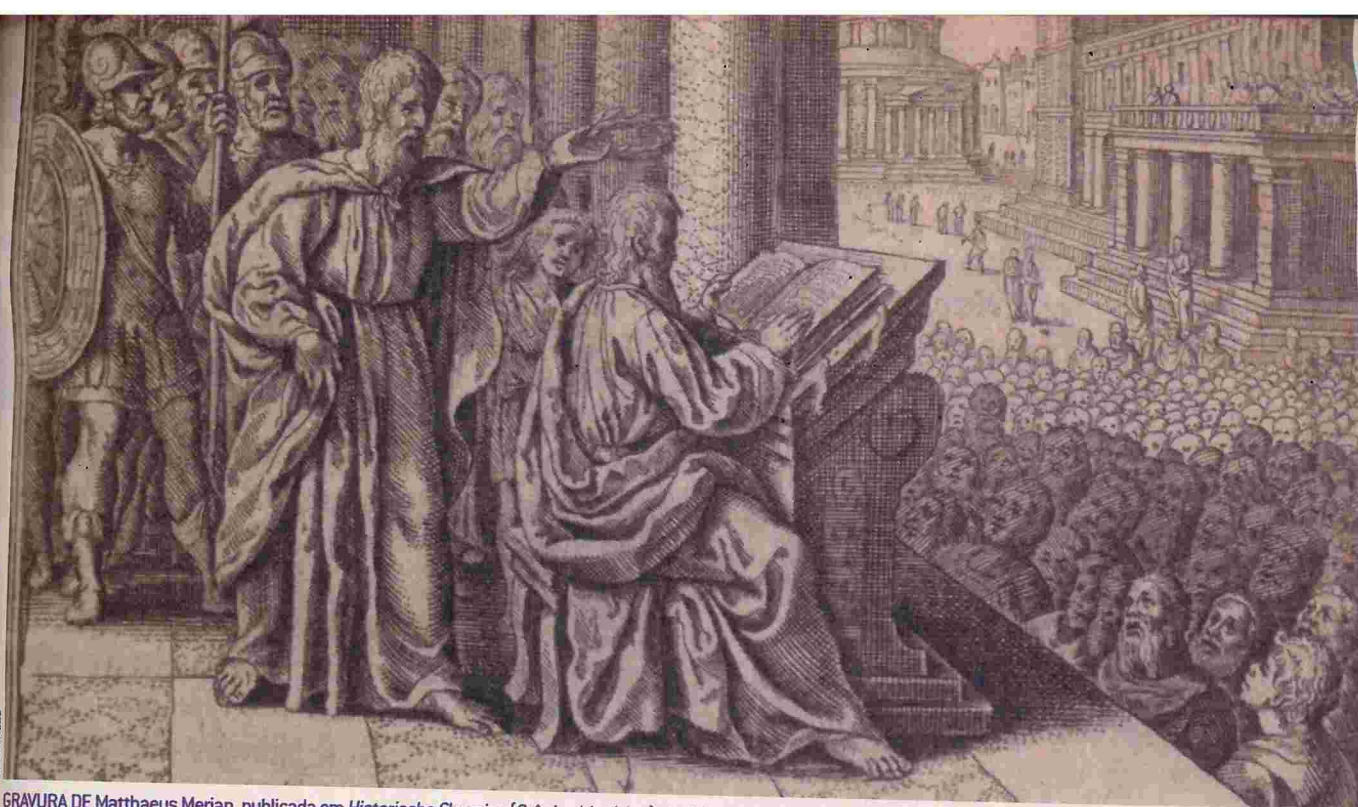
O relato em que Filopono faz referência a Hipócrates pressupõe que um ensino de geometria era ministrado em Atenas no século V a.C. Ignoramos isso, mas alguns diálogos de Platão representam Sócrates e matemáticos como o sofista Hípias de Elis – e o retrato não é favorável, pois é apresentado como um tolo vaidoso – e Teodoro de Cirena, geômetra contemporâneo de Hipócrates. Assim, o *Teeteto* traz o nome de um jovem ateniense, principal interlocutor de Sócrates no diálogo (os dois homens tentam definir a ciência), aluno de Teodoro e amigo de Platão.

A esse respeito, a tradição relata que o próprio Platão teria seguido as lições de geometria do mestre de Cirena. O acontecimento se passa no ano 399 a.C. e faz alusão ao curso que Teodoro ministrou a seus discípulos: trata-se de um círculo privado e não de um ensino institucional. É verdade que as cidades só se encarregavam do ensino elementar. Para além disso, os ensinamentos dependiam da ini-

ESQUEMAS DE CLASSIFICAÇÃO das ciências. a) O “quadrivium pitagórico”, segundo o neopitagórico Nicômaco de Gerasa (séc. II). Este justifica o sistema de Platão [aritmética, geometria, astronomia, harmônica] com a ajuda de três oposições polares: discreto/contínuo, em si/em relação; não movido/movido. b) Grandes articulações da classificação das ciências matemáticas ditas de Geminus. c) A descrição aristotélica das ciências matemáticas

SERES	DISCRETOS		CONTÍNUOS	
INDETERMINADO	Multiplicidade		Grandeza	
DETERMINADO	em si	em relação	não movida	movida
CIÊNCIAS CORRESPONDENTES	Aritmética	Música	Geometria	Astronomia





GRAVURA DE Matthaeus Merian, publicada em *Historische Chronica* (Crônica histórica), de Johann Ludwig Gottfried, de 1630, mostra o historiador Heródoto fazendo uma leitura pública de trechos de sua obra *Histórias*, em 445 a.C.

ciativa privada dos sábios e dos recursos financeiros de seus pais. No entanto, os diálogos de Platão devem ser tomados pelo que são: ficções literárias, onde o autor talvez se permita certos anacronismos.

De qualquer modo, na primeira metade do século IV, a geometria adquiriu o estatuto pleno de disciplina. Três autores da época, todos atenienses, dão testemunho de um debate sobre o lugar imputável a certas especialidades matemáticas na formação geral. Esses três autores são Isócrates, mestre da retórica, o ex-mercenário Xenófon e Platão. Os dois últimos se declaravam discípulos legítimos e verídicos de Sócrates. Aliás, Isócrates e Platão inauguraram cada qual sua escola, tornando-se rivais. As disciplinas mais mencionadas nesse debate eram a geometria, a astronomia e os cálculos. Para Isócrates e Xenófon, as matemáticas deveriam ser estudadas pelos jovens. O primeiro chegou a louvar sua virtude pedagógica, comparando-a a uma espécie de ginástica intelectual; contudo, cultivá-las seria algo indigno de um cidadão adulto responsável. Xenófon foi ainda mais categórico: das matemáticas só bastaria ensinar o necessário para a vida cotidiana, ou seja, muito pouco. Tal seria, para ele, o ensinamento de Sócrates.

A opção de Platão foi outra. Ele queria que as matemáticas, consideradas indispensáveis estudos preparatórios para a filosofia, tivessem um lugar importante na formação elitista proposta por ele. Os membros de sua escola – a Academia – debateram sobre a maneira de descrever e hierarquizar as disciplinas matemáticas.

Quadrivium Pitagórico

Assim, Platão promoveu um sistema organizado segundo quatro especialidades: aritmética, geometria, astronomia e harmônica (teoria dos intervalos musicais). Os autores de Antiguidade tardia atribuirão a paternidade desse esquema à escola pitagórica, quando não ao próprio Pitágoras, daí o nome “quadrivium pitagórico”, pelo qual ele seria conhecido na Idade Média. Quer tenha retomado seus predecessores, quer tenha ele mesmo procedido à sua elaboração, Platão se serviu desse esquema para descrever as atividades de certos matemáticos (não pitagóricos) e, sobretudo, para organizar o programa de estudo dos futuros reis-filósofos da cidade ideal, exposto no livro VII da *República*.

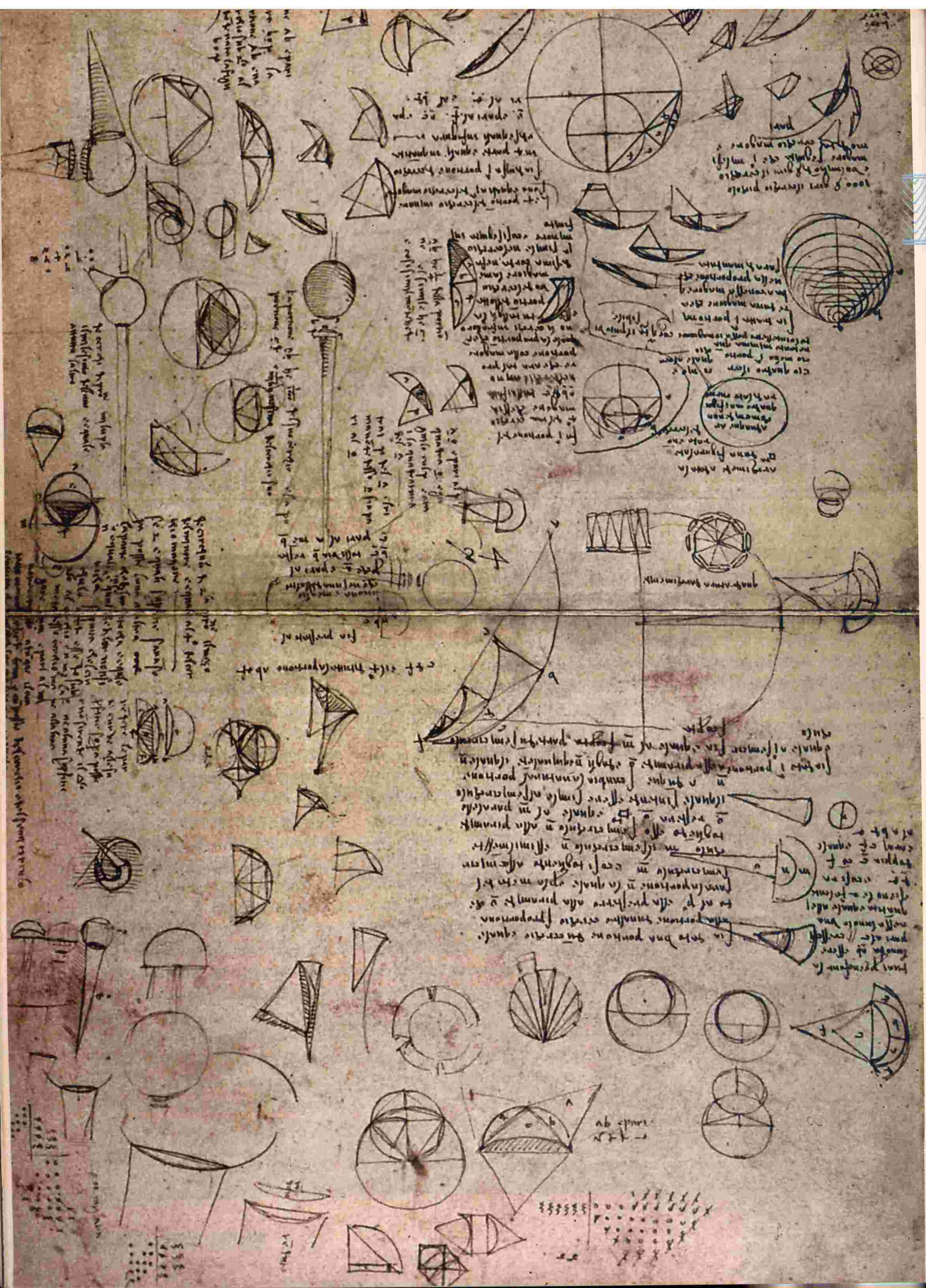
A escolha platônica implicava a exclusão de estudos de óptica e mecânica. Outros recortes foram propostos, e sem dúvi-

da já no seio da Academia, segundo a classificação dita “de Geminus”, este o nome de um filósofo estoico posterior (possivelmente do séc. I a.C.) que o retomou e o enriqueceu. Essa classificação se funda na oposição platônica entre os seres perceptíveis pelos sentidos e os seres inteligíveis ou idéias (ver quadro na pág. ao lado). O próprio Aristóteles criticou tal sistema que admitia a existência de ciências matemáticas cujo objeto seria sensível, e portanto corruptível. Não obstante, ele descreveu praticamente o mesmo conjunto de disciplinas: aritmética, geometria, estereometria, geodésia, astronomia, harmônica, óptica, mecânica, mas com ênfase em suas relações.

Tais considerações, conduzidas em um quadro filosófico geral relativo ao conjunto das atividades humanas, só teriam sentido se essas disciplinas estivessem bem desenvolvidas. Aristóteles reconheceu que em seu tempo nenhum conhecimento progrediu tanto quanto as matemáticas. Não há dúvida de que, nos anos 330-320, a geometria dispunha do pleno estatuto de disciplina, e isso quer dizer, uma especialidade matemática por excelência.

Bernard Vitrac

é pesquisador do Centro Nacional de Pesquisa Científica da França



Os grandes embates matemáticos

Determinar a quadratura do círculo por régua e compasso foi um problema explorado desde o século V a.C., por geômetras como Hipócrates de Chios. Sua impossibilidade só foi confirmada no século XVIII

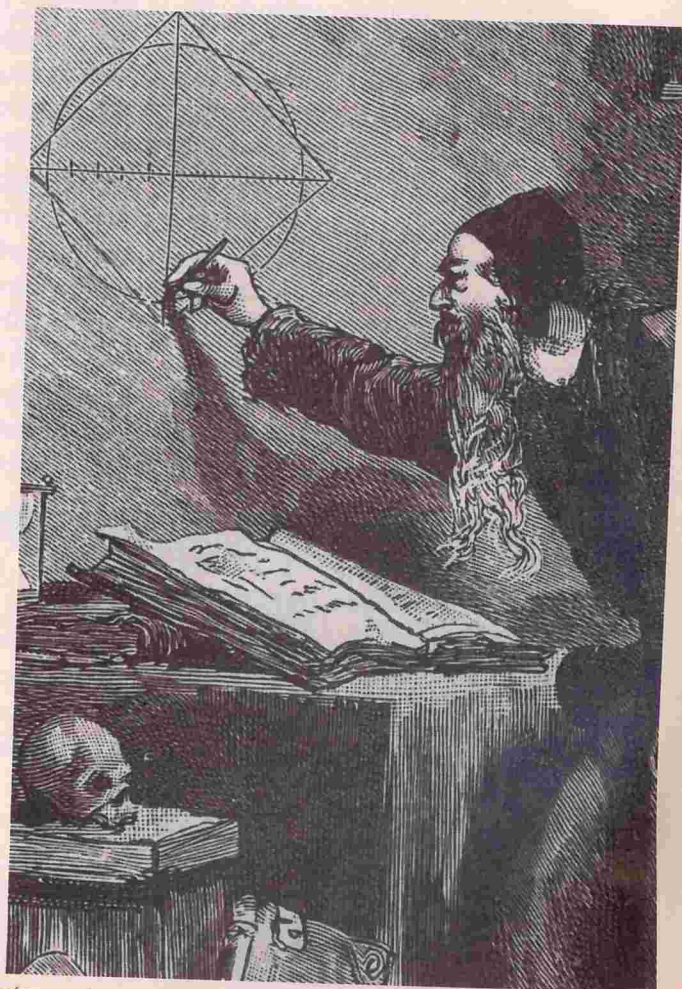
O CLÁSSICO PROBLEMA da quadratura do círculo em manuscrito de Leonardo da Vinci

Em um concurso realizado durante as festas dionisiacas de 414 a.C., o teatrólogo Aristófanes apresentou uma comédia repleta de fantasia, *As aves*, que lhe valeria o segundo prêmio. O tema da peça era a fundação de uma cidade nova por pássaros. A construção de novas cidades não tinha nada de excepcional para os gregos. Elas tinham como objetivo a regulação demográfica, a resolução de alguns problemas sociais e a instalação de “colônias” em zonas propícias. Aristófanes gostava de zombar dos novos intelectuais que freqüentavam Atenas naquela época, com roupas excêntricas e fazendo prospecções difíceis de entender. Sócrates tinha sido a vítima da chacota em *As nuvens*, e em *As aves* era a vez do geômetra e astrônomo Metão de Atenas.

Ele era conhecido por ter determinado o solstício de verão em 432 a.C. e pela proposta de reforma do calendário que, segundo Aristófanes, tinha indisposto a própria Lua. Na peça, o geômetra propõe partilhar o ar em lotes – afinal era uma cidade de pássaros – com a ajuda de instrumentos clássicos como régua e compasso. Na época, as comédias carregavam nas tintas, e Metão foi retratado usando “régua curva” e “círculo quadrado”.

Seria uma alusão enigmática ao célebre problema da quadratura do círculo? A questão mobilizava os filósofos da época e se tratava de determinar se existe um quadrado com a mesma área de um círculo. Já que existem quadrados de área menor e outros de área maior que a de um círculo dado, por que não haveria um quadrado com a mesma área do círculo? A questão parece ingênua, mas, se raciocinarmos em termos filosóficos, “quadrado” e “círculo” pertencem a gêneros diferentes, e nada garante que a área possa ter um valor qualquer independentemente da sua forma. Num registro comparável, no século IV antes de nossa era, Aristóteles, em sua *Física*, afirmava que a circunferência do círculo e a reta (o segmento da reta) não têm comprimentos comparáveis.

A maneira pela qual os geômetras colocam o problema é mais limitada:



SÁBIO DO SÉCULO XVI na busca da quadratura do círculo (gravura de 1890)

dado um círculo, trata-se de fornecer um procedimento para construir o quadrado – ou seu lado – equivalente, em área, ao círculo. É claro que é preciso saber quais dados relativos ao círculo devemos ter para determinar esse quadrado equivalente. Se o diâmetro e a circunferência são dados, a questão é simples, mas, se apenas o diâmetro (ou o raio) são conhecidos, ela é mais complicada (*ver texto na pág. 70*). Assim, o círculo, figura simples quanto a forma e traçado, levanta um problema de uma dificuldade proverbial. A impossibilidade da quadratura do círculo por régua e compasso só seria demonstrada no século XIX.

Redução de um Problema

Para exprimir a igualdade das áreas, utilizava-se o termo “quadratura”, literalmente “tornar quadrado”. Realizar a quadratura de uma área é um problema teórico, que nada mais é que a transposição de uma questão prática fundamental: “Qual é a área de tal propriedade?”. Transposição abstrata, pois os geômetras não se preocupavam nem com as unidades de medida utilizadas (na Antiguidade, elas variavam de uma cidade a outra), nem em saber se poderiam exprimir numericamente a lateral do quadrado equivalente. O que, aliás, não era evidente, haja vista a escala numérica utilizada na Antiguidade (inteiros e frações de inteiros). A formulação em termos de quadratura – de cubatura, para os



A ESCOLA DE ARISTÓTELES, afresco pintado entre 1883 e 1888 por Gustav Adolph Spangenberg, no prédio principal da Universidade de Halle, Alemanha

volumes – transformava o problema de medida numa questão de construção.

É fácil mostrar, por triangulação, que toda figura retilínea (retângulos, trapézios e polígonos) é equivalente, em área, a um determinado quadrado – ou seja, é quadrável. Por outro lado, a questão se complica quando a figura possui elementos curvos. Hipócrates de Chios foi autor de uma façanha: de uma parte, realizou a quadratura de três lúnulas, ou meias-luas (*ver quadro na pág. 39*); de outra, a de certa lúnula e de certo círculo, considera-

dos juntos.

Essa artimanha é o que Aristóteles explicou, em *Primeiros analíticos*, como sendo a redução de um problema: apesar de não atingir a solução, permite aproximar-se dela. Substancialmente, sendo toda figura retilínea quadrável e se, entre o círculo e uma figura retilínea (portanto quadrável), encontramos um “intermediário” quadrável – por exemplo, a soma de um círculo e de uma lúnula –, nos aproximaremos da solução da quadratura do círculo.

Indo mais longe: Hipócrates quadrou um círculo e certa lúnula; se essa lúnula fizesse parte das três de que ele fez a quadratura, então o círculo seria quadrável, pois a diferença de duas áreas quadráveis era evidentemente quadrável. Infelizmente, não é o caso. Sendo assim, como dizia Aristóteles, reconhecemos que Hipócrates se aproximou da solução: ele foi o primeiro geômetra grego a conseguir obter a quadratura de áreas não poligonais.

Acusação de Aristóteles

O filósofo João Filopono inseriu uma anedota sobre Hipócrates no comentário que fez sobre a *Física* de Aristóteles. No início de seu tratado, Aristóteles explica que é inútil rebater os autores que não respeitam os princípios fundamentais do domínio estudado: por exemplo, não adianta nada ir contra as argumentações dos eleatas (filósofos da escola de Zenão de Eléia) sobre física. Por outro lado, a “quadratura do círculo com a ajuda de segmentos”, fiel aos princípios da geometria, merece atenção, mesmo se for para rebatê-la. Assim, Aristóteles acusa um geômetra de ter divulgado uma prova inexata dela.

Como sempre, Aristóteles não dá de-



VASO GREGO com cena de *As aves*, comédia em que Aristófanes satiriza os geômetras da época

As três lúnulas de Hipócrates

Para quadrar suas lúnulas, Hipócrates demonstrou que elas são iguais a polígonos (quadráveis por triangulação). Contudo, não são quaisquer lúnulas. Um segmento de círculo é a área limitada pelo arco do círculo e a corda, tendo eles as mesmas extremidades. Cada lúnula é a diferença entre uma porção de área do círculo circunscrito a um polígono e um segmento de círculo construído sobre a mesma base do polígono. O argumento de Hipócrates baseia-se no que chamaremos de princípio H: "As áreas de dois segmentos de círculo semelhantes têm a mesma relação que os quadrados descritos sobre sua base".

Se é natural dizer que dois setores de círculo são semelhantes quando representam a mesma fatia do bolo (ou seja, quando os ângulos com centros AKB e ELF são iguais, figura a), o que dizer dos segmentos de círculo? Demonstra-se que, se forem tomados dois pontos quaisquer, C e D, dos arcos complementares AB, os ângulos ACB e ADB não dependem das posições de C e D de seus arcos respectivos. Eles são característicos, um do segmento ACB, outro do segmento ADB (figura a).

Conseqüentemente, os ângulos nos segmentos ACB e EPF são iguais apenas se os ângulos AKB e ELF também forem. Assim, dois segmentos são semelhantes se seus ângulos são iguais (definição III-11 dos *Elementos* de Euclides). Hipócrates utilizava, certamente, essa mesma definição.

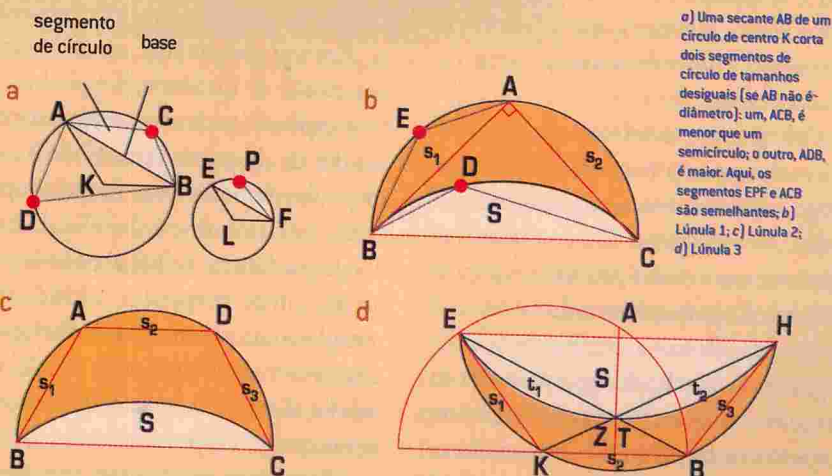
Voltemos ao princípio H: ele significa, na figura a, que a relação das áreas dos segmentos semelhantes ACB e EPF é igual à relação AB/EF^2 .

Na construção de suas lúnulas, Hipócrates combina o princípio H com relações métricas simples e deduz delas igualdades entre segmentos de círculos. Dessas igualdades, ele conclui que algumas lúnulas são quadráveis.

Lúnula 1 (figura b): ABC é um semiquadrado inscrito no semicírculo de diâmetro BC. Sobre BC, Hipócrates constrói um segmento S semelhante aos segmentos s_1 e s_2 descritos sobre AB e AC pelo semicírculo (ângulos BDC e BEA iguais). Como o ângulo em A é reto, temos: $BC^2 = AB^2 + AC^2$ (teorema de Pitágoras, ver pág. 60). Assim, a partir do princípio H temos $S = s_1 + s_2$. Se, do triângulo ABC, se separa o segmento S e acrescentam-se os segmentos s_1 e s_2 , obtém-se a lúnula 1. Como o que se acrescenta é igual ao que se retira, a lúnula 1 é igual ao triângulo ABC.

Lúnula 2 (figura c): ABCD é um trapézio em que $BA = AD = DC$ e $BC^2 = 3AB^2$. Sobre BC, Hipócrates constrói um segmento S semelhante aos segmentos s_1 , s_2 e s_3 descritos sobre BA, AD e DC. Como $BC^2 = 3AB^2 = BA^2 + AD^2 + DC^2$, temos: $S = s_1 + s_2 + s_3$. Se, do trapézio ABCD, for separado o segmento S e forem acrescentados os segmentos s_1 , s_2 e s_3 , obtém-se a lúnula 2. Pela mesma razão que anteriormente, a lúnula 2 é igual ao trapézio ABCD.

Lúnula 3 (figura d): EKBH é um trapézio em que $EK = KB = BH$. Hipócrates impõe $EZ^2 = (3/2)KB^2$. Sobre EH, ele constrói um segmento de círculo S passando por Z. As retas EZ e ZH cortam os segmentos t_1 e t_2 de forma que $t_1 = t_2 = (3/2)s_2 = (3/2)s_3$, a partir da condição imposta a EZ (s_1, s_2 e s_3 são os segmentos descritos sobre EK, KB e BH). Temos então: $t_1 + t_2 = s_1 + s_2 + s_3$. Se, da reunião dos três triângulos EKZ, ZKB e BZH, se separarem os segmentos t_1 e t_2 e acrescentarem os segmentos s_1, s_2 e s_3 , obtém-se a lúnula 3. Portanto esta é igual à reunião dos três triângulos.



talhes, o que abre uma brecha a seus comentaristas. Filopono pensa que Hipócrates de Chios é o geômetra criticado em *Física*. Ele admite assim que a quadratura com a ajuda de segmentos é a mesma daquela feita "com a ajuda da lúnula" (*sic*). Ele tem razão em relação a este segundo ponto, pois Hipócrates utiliza a seu bel-prazer a noção de segmento de círculo em suas construções. Quanto à idéia de que Hipócrates pretendia ter obtido a quadratura do círculo, fazendo crer que ele tinha quadrado todas as lúnulas, Filopono a trazia de seus predecessores – até o próprio Aristóteles. Este, em *Dos argumentos sofisticos*, cita, de fato, na mesma frase, um paralogismo de Hipócrates e a quadratura pelas lúnulas como exemplos de falsas provas que, contrariamente aos sofismas do filósofo, estão de acordo com os princípios da geometria, mas nem por isso são menos falsas.

A acusação de Aristóteles é legítima? A sutileza dos argumentos de Hipócrates não exclui essa possibilidade. É preciso, então, supor que o primeiro geômetra que conhecemos não era um ingênuo, mas um trapaceiro? Ou que Aristóteles estaria mal informado enquanto seu discípulo Eudê-

A duplicação do cubo

Segundo Eratóstenes, Proclo e Eutócio, Hipócrates foi o primeiro a reduzir o problema da duplicação do cubo ao da inserção de duas médias proporcionais entre dois segmentos. Quando quatro segmentos AB, CD, EF e GH são continuamente proporcionais (ou seja, quando $AB/CD = CD/EF = EF/GH$), os sábios da Antiguidade diziam que a relação AB/GH é a relação triplicada de AB/CD. Como escreveríamos, em termos modernos: $(AB/GH) = (AB/CD)^3$.

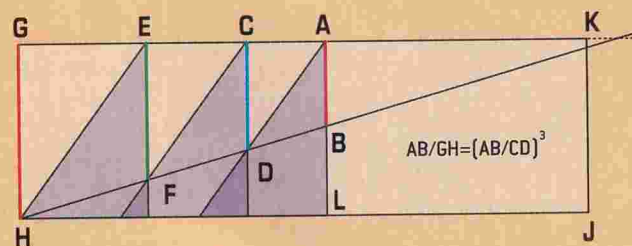
Imaginemos que o segmento GH seja o dobro do segmento AB. Se inserirmos entre eles duas médias proporcionais, CD e EF, a relação do cubo de aresta AB ao de aresta CD será a mesma de AB e GH: o cubo de aresta CD será o dobro do cubo de aresta AB.

Pode-se generalizar o problema para qualquer relação imposta entre AB e GH. Para arquitetos e outros especialistas em montagens e construções, o interesse é evidente: ele permite que se construam templos ou reproduzam máquinas de guerra em diferentes escalas, com a condição, no entanto, de que a inserção dessas duas médias seja efetivamente realizável.

Entre as soluções compiladas por Eutócio, distinguem-se dois grupos: as soluções de Arquitas, Menecme, Diócles e certamente Eudócio (puramente teóricas). Afora as de Diócles, essas são as mais antigas; e as soluções de Filon de Bizâncio, Eratóstenes, Nicomedes, Apolônio, Heron, Sporus, Pappus e aquela atribuída a Platão. Todas utilizam um dispositivo instrumental mais ou menos complexo. Filon, Heron e Pappus

apresentavam, aliás, suas soluções em *Introduções à mecânica*.

O instrumento mais ambicioso era o mesolábio de Eratóstenes que, teoricamente, permitia tomar tantos meios quantos se quisesse entre dois segmentos. Um exemplar foi consagrado num templo, acompanhado por um epigrama dedicado ao rei Ptolomeu III. Eutócio o copiou. Eratóstenes criticou as soluções anteriores (de Arquitas, Menecme e Diócles), segundo ele muito trabalhosas, enquanto a sua era tão simples. Depois, Nicomedes, em seu tratado sobre as conchóides, fez-lhe a mesma crítica.



O MESOLÁBIO DE ERATÓSTENES, segundo Pappus: três triângulos retângulos idênticos deslizando num quadro GHJK. O primeiro é fixado em H, os outros correm. Para encontrar duas médias proporcionais entre AB e GH, sendo B um ponto qualquer de AL, alinham-se sobre HB as interseções F e D, deslocando os triângulos. A partir do teorema dito de Tales, AB, CD, EF e GH são proporcionais

mio de Rodes escrevia uma história da geometria? Ou ainda que, sendo o primeiro a elaborar uma teoria da demonstração, não tinha compreendido o que Hipócrates fazia?

Essas explicações são pouco plausíveis. O que quer que seja, o caráter alusivo das afirmações de Aristóteles teve uma feliz consequência: no século VI, seu comentador Simplicius, constatando o desacordo das interpretações anteriores, se reporta à história da geometria de Eudêmio. Ele afirma que a citará fielmente pois é um testemunho próximo da época dos fatos.

O fragmento assim transmitido – um dos mais importantes testemunhos que chegou até nós sobre a geometria pré-euclidiana – é precioso. Ele confirma que Hipócrates não tinha perdido a esperança de resolver a quadratura do círculo pelas lúnulas. Ele havia, efetivamente, conseguido, insiste Eudêmio, quadrar três lúnulas cujos arcos exteriores eram, respectivamente: igual a um semicírculo; maior que um semicírculo; menor.

O fato de uma lúnula ser quadrável tem, portanto, uma certa forma de universalidade: ele não está reservado às lúnulas menores ou iguais a um semicírculo, por exemplo. Mas isso não significa que se tenha conseguido, como sugere Eudêmio (ou Simplicius?), a quadratura de qualquer lúnula. Na verdade, existem apenas cinco lúnulas quadráveis, mas isso seria estabelecido só em 1766, pelo matemático finlandês Martin Wallenius.

O que dizer sobre a acusação de paralogismo? Arrisquemos uma conjectura. Em seu comentário, antes de citar a autoridade de Eudêmio, Simplicius relata as explicações de seu predecessor Alexandre de Afrodísia (séc. II d.C.), que dispunha de outra fonte muito simplificada dos trabalhos de Hipócrates: 1 – A quadratura (solitária) de uma única lúnula (a mais simples). 2 – Uma versão (simples) da quadratura da combinação de um semicírculo e uma outra lúnula. Alexandre afirmava que o círculo seria, portanto, quadrável por subtração.

Existiriam assim duas versões do

trabalho de Hipócrates. Aristóteles teria lido a ruim? Não sejamos tão categóricos antes de examinar dois outros pontos. Por um lado, quando menciona o paralogismo de Hipócrates, Aristóteles se refere às *pseudographemata*, “falsas provas”; por outro, no século V, Proclo explica que Euclides (século III a.C.) tinha escrito uma coletânea de “pegadinhas” geométricas para completar os *Elementos*, destinada a deixar os aprendizes alertas contra possíveis erros. Essa obra era intitulada *Pseudaria*, mas outros autores a chamavam de *pseudographemata*.

Minha hipótese é a de que essa dualidade pedagógica – coletânea de elementos verídicos/antologia de pegadinhas é mais antiga que Euclides. Talvez remonte até mesmo a Hipócrates. A partir de seu estudo rigoroso das lúnulas (que se inscrevia na temática da redução dos problemas, e cujo eco aparece nos *Primeiros analíticos*), Hipócrates, ou um de seus sucessores, tinha formulado uma falsa quadratura do círculo pela via das lúnulas – “*pseudographema*”, ao qual *Dos argumentos sofisti-*

cos de Aristóteles fazem alusão. Não há razão para supor que Aristóteles tenha se enganado: ele e seus auditores distinguem os dois tratamentos. Por outro lado, os comentadores – não vamos esquecer que meio milênio separa Aristóteles e Alexandre – não têm mais os meios de fazer a diferença: Alexandre e Filopono são pegos pela armadilha; Simplicius, perplexo, compila os principais pontos divergentes.

O objetivo de Hipócrates, como vimos, era obter uma redução, aproximar-se da solução. Isso pode ser confirmado por meio de outro célebre problema da geometria grega, o da duplicação do cubo: “Construir um cubo duplo a partir de um cubo dado”. Duas histórias (pelo menos) pretendem restituir a origem desse problema: uma coloca em cena Mínos, querendo dobrar o túmulo cúbico projetado por Glauco; a outra figurava nas *Platônicas* de Eratóstenes. Os habitantes da ilha de Delos, acometidos por uma pestilência, consultam o oráculo de Apolônio, que os ordena a duplicar seu altar. Seus arquitetos, incapazes de resolver o problema, dirigem-se então a Platão. Este lhes diz que Deus os repreende por negligenciarem a geometria.

Vários autores contam essas histórias, principalmente Proclo e Eutócio, que, seguindo Eratóstenes, afirmam que Hipócrates fora o primeiro a reduzir esse problema ao da inserção de duas médias proporcionais entre um segmento de reta e seu dobro. É sob essa forma generalizada – “inserir duas médias proporcionais entre duas retas dadas” (e entre uma reta e seu dobro) – que a questão seria estudada.

Hipócrates não a resolveu, mas Eutócio relata uma dúzia de soluções (*ver quadro na pág. 40*), entre as quais uma, instrumental, é atribuída a Platão. A redução de um problema por outro, primeira forma de realização analítica, era então uma característica da geometria de Hipócrates.

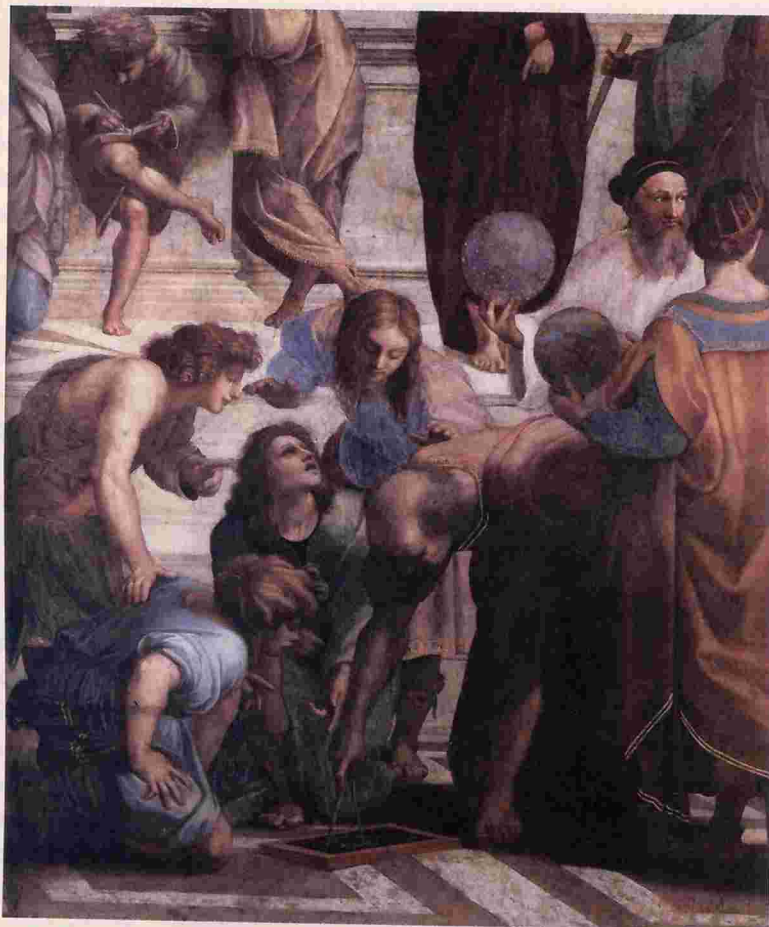
Além de todas essas incertezas, o fragmento de Hipócrates-Eudêmio transmitido por Simplicius é interessante prin-

ra cujos elementos – extremidades, laterais, arcos de círculo – são designados por letras). Ela desvenda o estado final de uma construção cujas etapas foram descritas (e justificadas) no texto, precisamente graças ao uso das letras.

Esse procedimento, tão simples e familiar aos estudantes de hoje, é característico da geometria grega antiga. Ele estava provavelmente ligado à vontade de espalhar o resultado matemático por escrito. Em uma apresentação oral, mostra-se tal linha, aponta-se tal ângulo com o dedo, fala-se do ponto “abaixo”, do círculo “à esquerda”, da “reta principal”. Ora, um texto geométrico redigido apenas com a ajuda de tais indicações é pouco compreensível fora de uma troca verbal, e as construções estudadas seriam limitadas. A das lúnulas já não é mais totalmente elementar (*ver quadro na pág. 39*).

Como a progressão de Hipócrates era demonstrativa, era preciso impor um princípio inicial. Segundo Eudêmio, ele se enuncia da seguinte maneira: “Os segmentos de círculo semelhantes têm, um e outro, a mesma relação que os dos quadrados descritos sobre suas bases.” Eudêmio acrescenta que esse princípio,

por sua vez, se demonstrava (talvez no conjunto de elementos que se atribuem a Hipócrates) a partir de um teorema: “Os círculos têm, um e outro, a mesma relação que os quadrados descritos sobre seus diâmetros”. Dito de outra forma, se o diâmetro de um círculo é o dobro de outro, sua área será o quádruplo da do outro; se ele é três vezes menor, a área será nove vezes menor. Esses exemplos numéricos são fáceis de compreender, mas o resul-



EUCLIDES REPRESENTANDO SUA geometria em detalhe da pintura *A Escola de Atenas*, de Rafael

palmente porque mostra que, desde aquela época, o estilo da exposição geométrica é próximo daquele que encontraremos em seguida nos *Elementos* de Euclides e entre os geômetras alexandrinos. Dois traços, principalmente, são comuns às duas épocas: a ação de Hipócrates é demonstrativa e articula um texto justificativo e um diagrama com letras (não um croqui mudo sugerindo simplesmente formas como alguns motivos decorativos, mas uma figu-

tado geral não é fácil de comprovar. Basta ler a Proposição 2 do 12º livro de *Elementos* de Euclides, que faz essa demonstração. Infelizmente, não conhecemos a prova de Hipócrates.

Outro fato interessante sugerido pelo fragmento de Eudêmio: o objeto fundamental da geometria de Hipócrates é a figura, seus elementos constitutivos (extremidades, ângulos, laterais, faces ou áreas delimitadoras, no caso dos sólidos) e suas propriedades – e não o espaço de suas transformações, como para os modernos. Na linguagem de Aristóteles – criticada na Antigüidade –, a geometria é uma espécie de “física” abstrata: o geômetra antigo examina as coisas “isolan-

do-as”, considerando-as em si, abstraindo algumas características (cor, peso; matéria que as compõe...), para reter apenas três propriedades: forma, tamanho (os geômetras dizem “grandeza”) e posição. Em geral, ele prevê figuras imóveis. Utilizar é, para isso, geometrizar o movimento foi um dos grandes problemas epistemológicos afrontados na Antigüidade, sem êxito.

Claro que o geômetra não se contenta com esse ponto de vista substancial. Ele compara também as figuras, por exemplo, quanto à forma (elas são parecidas?), quanto à grandeza (comparação das áreas, dos comprimentos etc.), ou ainda quanto à posição (tal reta é tangente a tal círculo, tal polígono está inscrito ou circunscrito a tal círculo etc.). A geometria da Antigüidade, em

particular em suas exposições sistemáticas tais como os *Elementos* de Euclides, manterão essa dualidade entre características geométricas dos objetos e as relações entre eles.

Grandes Questões

Essa maneira de abordar os seres geométricos determina também o tipo de questão que se coloca a respeito desse assunto. Como vimos, Hipócrates se empenhou em resolver, ou pelo menos reduzir, os problemas. A resolução é a atividade fundamental do geômetra e, mais geralmente, do matemático da Antigüidade. Assim, o astrônomo dá conta dos fenômenos celestes: deslocamento do nascer e do pôr-do-sol sobre o horizonte entre os trópicos, fases da lua, eclipses, variação da duração do dia e da noite de acordo com a época do ano ou a latitude do lugar, movimento complexo dos planetas (principalmente suas estações e retrogradações aparentes) etc. O mecânico explica por que e como movemos um objeto pesado usando uma pequena força. A questão fundamental do harmônico é que alguns intervalos musicais, como as oitavas, são consonantes e outros, como o tom, não são. A partir daí, como construir uma escala?

Os grandes problemas induziam uma ligação intelectual que ia além das relações entre matemáticos contemporâneos. Um grande problema afetava o desenvolvimento de vários domínios, mesmo se apenas uma parte da comunidade dos sábios se interessasse por ele: ele sugeria pistas de pesquisa, ocultava outras, era a oportunidade para testar métodos para outras questões. Sua resolução necessitava, às vezes, de longas pesquisas, uma paciente acumulação de resultados intermediários que, no caso da geometria, constituiriam vários teoremas consignados em conjuntos de elementos.

Na geometria, uma das categorias fundamentais de problemas é a construção de figuras que satisfaçam condições. Algumas são bem simples: encontrar um quadrado duplo a partir de um quadrado dado.

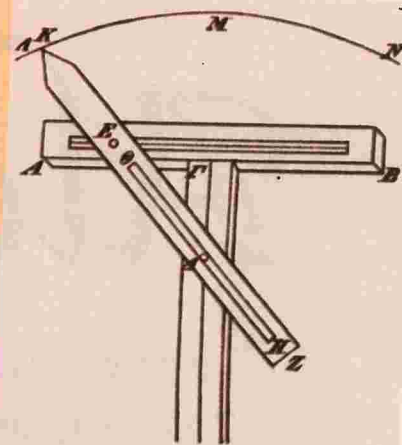
SEGUNDO A LENDA, o problema da duplicação do cubo teria sido proposto por Apolo, no oráculo de Delfos. Uma delegação o teria consultado sobre o que fazer para livrar Atenas da peste (que ocorreu cerca de 430 a.C. – na Guerra do Peloponeso), e ele teria pedido que seu altar, em forma de cubo, fosse duplicado



ERIC E DAVID HOSKING/CORBIS

Máquina de Nicomedes

Para construir sua terceira lúnula, Hipócrates busca o segmento de comprimento EZ, de forma que E esteja sobre um círculo dado [o círculo de centro K e raio KB]; que Z esteja sobre uma reta dada [a mediatriz $\Gamma\Delta$ de KB]; e, finalmente, que o prolongamento de EZ passe pelo ponto fixo B. Essa construção, chamada *neusis*, é realizável pelo método “régua e compasso”, mas Nicomedes, na passagem do século III para II a.C., introduz uma família de curvas, as conchóides – assim como um instrumento para traçá-las (*à dir.*) –, que permitem construções mais genéricas desse tipo. O ponto E da régua KZ fica restrito à ranhura AB do esquadro, assim como o ponto Δ do esquadro desliza sobre a incisão H $\odot$ da régua. Qualquer que seja sua inclinação, o segmento EK, de comprimento fixo, é tal que seu prolongamento passe sempre por Δ . A linha ΔMN descrita por K é chamada de “conchóide principal” por Nicomedes, que a utilizava para inserir duas médias proporcionais entre duas retas dadas (obtem-se as outras conchóides variando a relação $\Delta E/EK$).



Outras são bem mais difíceis, tais como as evocadas a propósito de Hipócrates: encontrar um cubo que seja o dobro de um cubo dado, construir duas retas médias proporcionais entre duas retas dadas. De fato, os geômetras devem refletir sobre os meios de que dispõem para resolvê-los. Daí, as conseqüências globais sobre a organização da geometria, e quais são as construções elementares aproveitáveis? Como deduzir quais são as manipulações possíveis sobre as figuras?

O caso mais conhecido é aquele dos primeiros livros de *Elementos*: ao introduzir três postulados, Euclides se baseia em traçar uma reta de qualquer ponto a qualquer ponto, prolongá-la e traçar um círculo de centro dado passando por outro ponto dado. A partir daí, ele constrói figuras simples – triângulo, quadrado – e indica como traçar uma perpendicular a uma reta dada, como dividir em duas partes iguais um segmento etc. Isso constitui a “caixa de ferramentas” do geômetra. Dizemos que a geometria plana de Euclides utiliza-se de “régua e compasso”, apesar de nenhum instrumento ser mencionado em seus postulados.

É pouco provável que os efeitos de tal limitação fossem sentidos por Hipócrates.

Na construção da terceira lúnula, ele coloca o segmento EZ, de comprimento dado, de tal maneira que o ponto E esteja sobre a circunferência de diâmetro AB, o ponto Z sobre a reta KH e que EZ, prolongado,

medes, em seu estudo das conchóides.

Os geômetras da Antigüidade entendiam – sem poder demonstrar – que a complexidade dos problemas varia segundo os meios utilizados para sua resolução.

No século IV, Pappus de Alexandria relatou uma classificação dos problemas segundo três espécies, em função das linhas utilizadas para resolvê-los. Ele distinguiu os problemas “planos”, solucionáveis por combinações de retas e círculos (como na geometria plana de Euclides); os “sólidos”, que requerem a utilização de uma ou mais cônicas (*ver artigo na pág. 80*); e os problemas “lineares”, cuja resolução apela para curvas ainda mais complexas (o que

implica saber construí-las).

Essa repartição, fundada na prática geométrica, remonta certamente à época helênica (talvez devido a Apolônio de Perga). Hipócrates, primeiro autor ao qual se atribuem os *Elementos*, lançou-se à resolução de problemas como a duplicação do cubo e a quadratura do círculo, não solucionáveis “pela régua e compasso”: é impressionante constatar que ele teria exercido seus talentos nas três categorias da classificação dos problemas (plano, sólido e linear), só mais tarde elaborada pelos geômetras alexandrinos. (BV)



PÁGINAS DO LIVRO XI dos *Elementos*, de Euclides, com as proposições 31 a 33, sobre o volume dos paralelepípedos. Manuscrito em grego do século IX

passasse por B (*ver quadro acima*). Os geômetras da Antigüidade chamam esse tipo de construção de *neusis* (“inclinação”). Hipócrates não dá explicações.

Pode-se mostrar que essa construção preliminar é realizável “pela régua e compasso”, mas pode-se também imaginar que Hipócrates se apoiava no uso de outro instrumento: uma espécie de régua graduada, deslizante, onde teria marcado o comprimento EF para, em seguida, colocá-lo de acordo com as condições necessárias. A idéia seria retomada por outros matemáticos, principalmente Nico-

Tradição em Alexandria

No século III a.C., a cidade fervia de intelectuais e de matemáticos, que tomaram conhecimento dos trabalhos dos colegas enquanto ali estavam e trocaram correspondência durante a produção de suas obras

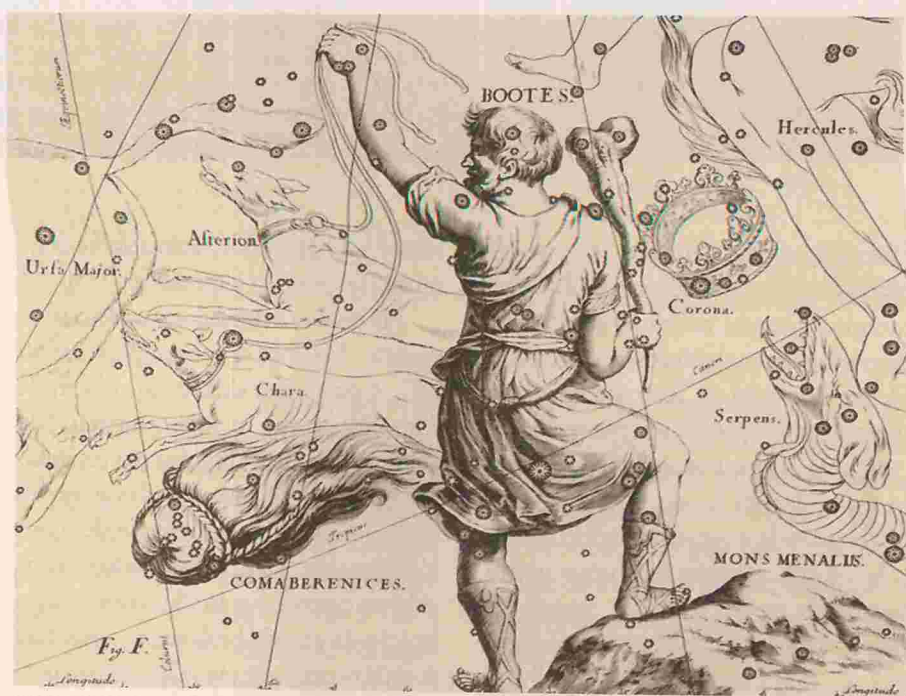
MAPA DE ALEXANDRIA publicado no livro *Civitates orbis terrarum*, de Braun e Hogenberg, ca.1572



Em 246 a.C., Ptolomeu III Evergetes partiu para Antióquia. Era o início da terceira guerra da Síria. Ele acabara de subir ao trono e de se casar com Berenice, filha de Magos de Cirene. Na sua partida, ela fez uma promessa caso Ptolomeu retornasse vitorioso, o que ocorreu. Ela deu um cacho de cabelo ao templo de Afrodite, porém, no dia seguinte, a mecha sumiu. O astrônomo Cono de Samos – querendo favores do rei – disse ter encontrado o cacho no céu. Mostrou sete estrelas (entre as constelações de Leão e Virgem) que, disse ele, pertenceriam à cabeleira de Berenice.

Esse é o relato feito por vários autores gregos e latinos inspirados na elegia composta por Calímaco de Cirene – autor dos catálogos da Biblioteca de Alexandria – para celebrar o acontecimento “astronômico-capilar”. É possível que Calímaco tenha apoiado seu compatriota Eratóstenes para que este obtivesse o posto de bibliotecário, ocupado até então por seu rival, o poeta Apolônio de Rodes. Talvez por gratidão, Eratóstenes, quando compôs sua antologia de mitos astrais, assinalou a localização da cabeleira, embora mais sobriamente que Cono, mencionando porém, que se via ali a Coroa de Ariana.

Cortesãos ou simplesmente amigos da família real, Eratóstenes e Cono brilhavam em matemática. Ambos trocavam correspondência com Arquimedes de Siracusa. Este demonstrava toda sua admiração pela capacidade excepcional de Cono em geometria. Eratóstenes foi, ao mesmo tempo, poeta, mitógrafo, historiador e matemático. Ele mesmo se de-



A SUPOSTA CONSTELAÇÃO Cabeleira de Berenice, em mapa celeste de Hevelius, 1690

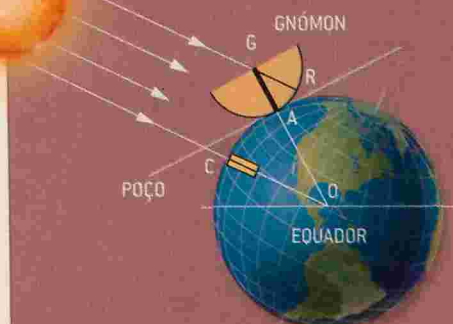
signava como “filólogo”. Suas conquistas foram muitas, como a cronologia da história grega (que inicia com a guerra de Tróia) e o método para determinar números primos. A mais famosa diz respeito à geografia matemática: as conquistas de Alexandre e as recentes viagens de exploração tinham ampliado os limites do mundo e, na sua *Geografia*, Eratóstenes retificou o mapa. E propôs o cálculo da circunferência da Terra, considerado seu principal trabalho (ver quadro na pág. 46).

Glória Através dos Livros

As condições políticas tinham mudado bastante: as cidades-estado estavam empobrecidas com os constantes conflitos. Alexandre arrastara os gregos na sua

conquista do Império Persa e precisou helenizar o imenso território conquistado e desorganizado. A unidade do Império foi mantida por um tempo, mas era uma ilusão. Generais de Alexandre governaram vastos territórios em seu nome. Durante 40 anos, alguns tentaram, em vão, reconstituir o Império, outros queriam transformar em reino o território que administravam.

Ptolomeu, filho de Lagos, fundador da dinastia dos Ptolomeus, governava o Egito e proclamou-se rei em 306 a.C. Mudou-se para Alexandria, região que, dizia-se, havia sido escolhida pelo próprio Alexandre, pois permitiria a implantação de um porto marítimo. No decorrer do século III a.C., Alexandria tornou-se a maior cidade do Mediterrâneo. Em 297,



A medida da circunferência terrestre por Eratóstenes

Eratóstenes observou a sombra do Sol para calcular a circunferência do planeta. Em um dia do solstício de verão na cidade de Cirene (representada pelo ponto C na figura ao lado), quando o Sol estava no meridiano (meio-dia), ele notou que o fundo de um poço vertical era iluminado sem nenhuma sombra. Ele deduziu daí que Cirene estava sobre o trópico de verão. No mesmo dia e na mesma hora, em Alexandria (A), a sombra medida com a ajuda de um gnomon (haste AG) ajustada numa semi-esfera (escafa) representava a 50ª parte da circunferência da dita esfera.

Como o Sol estava muito distante da Terra, Eratóstenes supôs que seus raios eram paralelos. Ele imaginou também que as duas cidades estão no mesmo meridiano, o que não é verdade. Deduziu (pela proposição I-29 de Euclides) que os ângulos RGA e ADS eram iguais. O arco AC é, portanto, a 50ª parte da circunferência da esfera terrestre. Sabendo que a distância Alexandria – Cirene fora medida e equivalia a 5.000 estádios, Eratóstenes obteve uma circunferência terrestre de 250 mil estádios. Como ele dividia o círculo em 60 partes (e não em 360°), ele aumentou seu resultado, adotando 252 mil estádios.

Ptolomeu, conhecido como Soter (o salvador), acolheu Demétrios de Falère, cassado de Atenas, onde fora governador (imposto pelos macedônios) por dez anos. Ele era discípulo de Teofrasto, primeiro sucessor de Aristóteles à frente do Liceu.

Conta-se que Demétrios aconselhou o rei a fundar um museu, instituição erudita concebida segundo o modelo das escolas filosóficas atenienses: uma confraria voltada para o culto das musas. Os santuários consagrados a elas eram associados a um culto funerário ou acolhiam concursos literários para honrar a memória de um grande poeta.

O museu de Alexandria tinha outra amplitude. Era destinado a acolher e encorajar o trabalho de vários intelectuais protegidos do rei. Demétrios teria também preconizado a constituição daquilo que se tornaria a maior biblioteca da Antiguidade. A época de Alexandre havia terminado e as grandes conquistas militares seriam difíceis naquela região. Ptolomeu percebeu que havia conquistado um outro tipo de glória com o museu e as coleções de livros.

A biblioteca era uma instituição independente ou tratava-se apenas de uma parte do museu? Historiadores modernos divergem sobre esse ponto. A palavra “biblioteca”, em grego, designa tanto um local que abriga livros como uma prateleira instalada, por exemplo, dentro de um

templo. E não há descrição detalhada do museu no período ptolomaico.

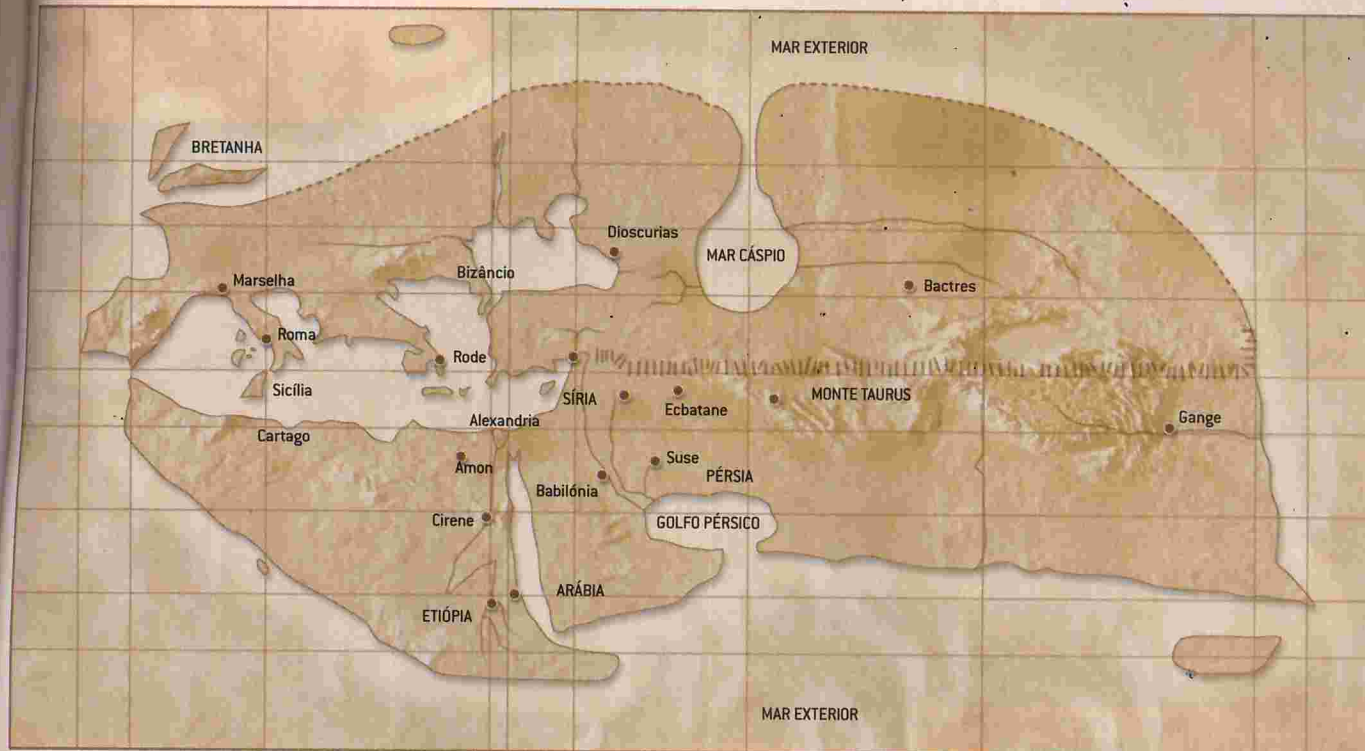
Há poucas evidências para resolver a questão. Vejamos dois exemplos: em 48 a.C., César ficou sitiado no palácio de Alexandria, que incluía o museu. Ele ateou fogo na frota inimiga e o incêndio passou para um bairro vizinho ao porto, onde um depósito de livros (e de trigo) foi destruído. Alguns historiadores consideram que nesse episódio ocorreu a destruição da grande biblioteca – mas isso só teria ocorrido se ela se localizasse perto do porto e não no museu. Segundo: não sabemos nada sobre matemáticos que

se beneficiaram do mecenato ptolomaico no museu. Nenhuma grande figura científica do período helenístico ficou conhecida por ter sido membro do museu, estudando ou ensinando, entre os séculos III e I a.C. Entretanto, se a biblioteca pertencia ao museu, então Eratóstenes, que o dirigiu por muitas décadas, foi membro dela.

As instituições eruditas fundadas pelos Ptolomeus trabalharam na conservação de livros e na edição crítica de textos – confrontar cópias divergentes de uma mesma obra (consequência da produção manuscrita); escolher uma



PINTURA DE 1813, de Vincenzo Camuccini, retrata o rei egípcio Ptolomeu II visitando a Biblioteca de Alexandria



O MAPA-MÚNDI de Eratóstenes. Seus eixos principais são o paralelo e o meridiano de Rodas

variante como autêntica sem desaparecer com as outras etc. Essas operações importantes foram feitas por editores alexandrinos, precursores dos filólogos modernos. Baseavam-se principalmente em textos poéticos, mas é possível que alguns, como Eratóstenes, tenham editado textos científicos.

É muito provável que algumas ciências matemáticas tenham despertado o interesse dos Ptolomeus. No prefácio de seu tratado sobre o termoscópio (aparelho sensível à variação térmica), o matemático e mecânico Filon de Bizâncio afirma que elas foram aprimoradas pelos engenheiros alexandrinos graças ao apoio do rei, apaixonado pela técnica. O aperfeiçoamento das máquinas de guerra ou do mapa-múndi interessava o poder público. Entretanto, não havia o mesmo entusiasmo pela pesquisa fundamental.

Diferentes relatos contam o apetite de Ptolomeu III pelos livros e os procedimentos pouco ortodoxos empregados para obtê-los. Ele ordenou que todos os livros de viajantes que desembarcassem em Alexandria fossem copiados. Detalhe: quem ficava com as cópias eram os antigos donos.

O rei ainda pediu aos atenienses livros de Sófocles, Eurípides e Ésquilo para copiá-los. Provavelmente eram exemplares oficiais, organizados no fim do século IV a.C. por iniciativa do orador Licurgo, para preservar os textos das modificações que os autores ficavam tentados a introduzir. Os atenienses pediram um depósito de 15 talentos de prata (cerca de 400 kg) como garantia. Ptolomeu guardou os originais (sacrificando sua caução) e devolveu as cópias. Em todos os relatos eram mencionadas obras de medicina, dos trágicos atenienses, da Bíblia, de Aristóteles, mas nunca de aritmética ou geometria.

Prefácios Preciosos

A atmosfera intelectual e as oportunidades oferecidas pela grande cidade cosmopolita atraíam aventureiros, traficantes de livros, sábios e estudantes de toda parte. Os matemáticos não escapavam desse entusiasmo: a atração exercida por Alexandria, principalmente entre os anos 300-150 a.C., manifestou-se de duas maneiras. Primeiro, pelos textos dos prefácios que os tratados matemáticos continham e, segundo, pelo fato de uma obra matemática ser conservada quando seu autor estava associado à cidade.

Ignoramos a origem da prática do prefácio científico. Os tratados mais antigos conservados, os de Autólico de Pitane, de Aristarco de Samos ou os *Elementos* de Euclides, não os continham. Os primeiros que conhecemos são dos seis tratados de Arquimedes. Eram cartas que acompanhavam o envio dos tratados a correspondentes alexandrinos: Dositéia de Pelusium e Eratóstenes (ver quadro na pág. 48). Esses prefácios foram preciosos para a compreensão das matemáticas do período helenístico.

Desse período, dispomos de 15 prefácios de cinco autores: Arquimedes, Filon de Bizâncio, Diocles, Apolônio e Hipsicles de Alexandria. Esses textos mostram que os matemáticos não estavam concentrados em Alexandria, mas espalhados pela bacia mediterrânea: a Grécia, as ilhas, Ásia Menor, Egito, Líbia e Magna Grécia (o conjunto que formava o mundo grego da época). Além da cidade de Arcádia, onde morou Diocles, são mencionadas Bizâncio, Tasos, Samos, Perga, Pérgamo, Éfeso, Tiro, Rodas, Alexandria, Cirene e Siracusa.

Os matemáticos mantinham contato uns com os outros, trocando obras ou fazendo visitas. No século II a.C., Basilide

de Tiro foi a Alexandria e encontrou o pai de Hipsicles; o geômetra Náucrates foi hóspede de Apolônio de Perga em Alexandria e incitou-o a redigir seu tratado sobre as seções cônicas; tratado esse que enviou em seguida para Eudemo, que havia encontrado em Pérgamo e, parece também, em Éfeso, com o geômetra Filônides. Apolônio mandou o filho levar o segundo livro do tratado das seções cônicas a Eudemo, que foi encarregado de transmiti-lo a Filônides, caso ele estivesse de passagem por Pérgamo. No século III a.C., Arquimedes enviou seus problemas a Cono e a Dositéia e Eratóstenes. Heráclito teria sido o intermediário.

Geômetras se Desafiavam

Seria exagerado falar em controvérsias na geometria, principalmente se compararmos com as disputas em filosofia ou em medicina antigas. Entretanto, os autores desse período cultivavam o desafio. Os prefácios eram uma maneira de apresentar problemas aos colegas, resolver os que eles haviam proposto e até criticar soluções imperfeitas sugeridas pelos outros.

Arquimedes enviou a vários correspondentes apenas enunciados sem demonstração e convidou-os a resolvê-los.

Prefácios dos geômetras

"Apolônio a Eudemo, salve... Como eu havia notado, em nosso encontro em Pérgamo, que tu tinhas pressa em ver meus trabalhos sobre as seções cônicas, faço chegar a ti o primeiro livro que corrigi, e te enviarei os outros quando estiver satisfeito com eles.

Acredito que tu não tenhas esquecido, pois soubestes por mim, que foi pela insistência do geômetra Náucrates, que foi meu hóspede quando estive em Alexandria, que me engajei no estudo dessas matérias e, quando ele estava prestes a embarcar, apressei-me a colocá-lo a par do que eu já havia elaborado, em oito livros, sem preocupar-me com as correções, mas anotando tudo que me vinha à mente, com a intenção de fazer uma revisão posteriormente. Hoje que pude colocar uma ordem nas coisas, eu os publico. [...]

Enviei-te meu filho Apolônio para que ele te entregue o segundo livro que escrevi sobre as seções cônicas. Leia-o com atenção e divulgue-o àqueles que sejam dignos de lê-lo. Mostre-o também ao geômetra Filônides, o qual recomendei-te em Éfeso, caso ele esteja de passagem por Pérgamo."

Trechos do prefácio do Livro I das Cônicas de Apolônio

"Arquimedes a Dositéia, alegria! Da maioria dos teoremas, dos quais eu havia enviado os enunciados a Cono e dos quais tu me incentivas sempre a redigir as demonstrações, tu possuis as demonstrações escritas nos livros que Heráclide te devolveu [...]. Não te surpreendas por eu ter demorado tanto para publicar as demonstrações dessas proposições. O motivo é que eu quis submetê-las antes a homens que, praticando a matemática, preferem se dedicar à pesquisa [...].

Cono morreu antes de ter tido o tempo necessário para o estudo dessas questões. Senão ele teria tornado evidentes as soluções para a descoberta de todas essas propriedades e muitas outras e teria feito progredir a geometria; pois sabemos que ele possuía uma inteligência pouco comum e desenvolvia uma atividade sem igual. Mas, embora tenham decorrido muitos anos da sua morte, verifico que nenhum geômetra se lançou nesses problemas. Também eu quero propô-los a cada um [...] desse modo, aqueles que pretendem encontrá-los, sem produzir nenhuma demonstração, ficarão confusos no esforço de achar soluções impossíveis [...]. Eis qual era o primeiro problema [...] quanto àqueles que estavam colocados separadamente na sua sequência, eles são falsos."

Extrato do prefácio do livro A esfera e o cilindro, de Arquimedes



O *ALMAGESTO* É UMA das obras científicas originais surgidas no século II d.C., quando os pensadores dedicavam-se sobretudo a reeditar e comentar obras consideradas clássicas. Na gravura, Ptolomeu e a Astronomia

O teste incluía até problemas falsos para desmistificar aqueles que pensavam saber resolver tudo. Alguns matemáticos adquiriram uma autoridade reconhecida: Cono de Samos, segundo Diócles e Arquimedes, assim como Eudemo de Pérgamo, segundo Apolônio. Às vezes, eram-lhes submetidas publicações e ficavam encarregados de transmiti-las àqueles que julgassem dignos.

Nesse regime de desafios, às vezes era necessário publicar rapidamente, deixando a revisão para depois. Um caso que ocorreu com Apolônio foi significativo: ele próprio mencionou o aperfeiçoamento da sua redação do tratado das seções cônicas. Em outro caso, caiu nas mãos do pai de Hipsicles uma versão com incor-

reções do geômetra sobre a comparação do dodecaedro e do icosaedro. O erro foi corrigido em outra versão que o próprio Hipsicles divulgou.

A atração exercida por Alexandria era evidente: os cinco autores de prefácios dos séculos III-II a.C. tinham uma relação estreita com a cidade dos Ptolomeus. Hipsicles era alexandrino. Foi o primeiro matemático designado como tal, apesar de a cidade ter sido fundada 150 anos antes. Isso era plausível: em uma cidade nova, mas poderosa, os primeiros intelectuais vinham de fora, de cidades na órbita política de Alexandria como Cós, Samos, Cirenaica, Panfilia. Apolônio de Perga e Filon de Bizâncio moraram em Alexandria. Não sabemos se foi o caso

"Basilide de Tiro, ô Protarco, quando veio a Alexandria e foi colocado em contato com meu pai devido à afinidade com o estudo, conversou com ele durante quase todo o tempo de sua estadia. Um dia, estudando o escrito de Apolônio, *Sobre a comparação do dodecaedro e do icosaedro inscritos na mesma esfera*, procurando qual era sua relação mútua, foram da opinião que Apolônio não havia tratado disso corretamente e redigiram eles mesmos uma versão corrigida, como eu ouvi da boca do meu pai. Mas, eu mesmo, mais tarde, peguei um outro livro publicado por Apolônio, contendo uma demonstração sobre a questão proposta e me regozijo bastante pela sua abordagem do problema. Assim, portanto, está ao alcance de todos; cada um que examine o escrito publicado por Apolônio, já que ele parece, de fato, ter colocado em circulação após tê-lo retomado, posteriormente, com cuidado."

Trecho do prefácio ao Livro XIV dos Elementos, de Hipsicles

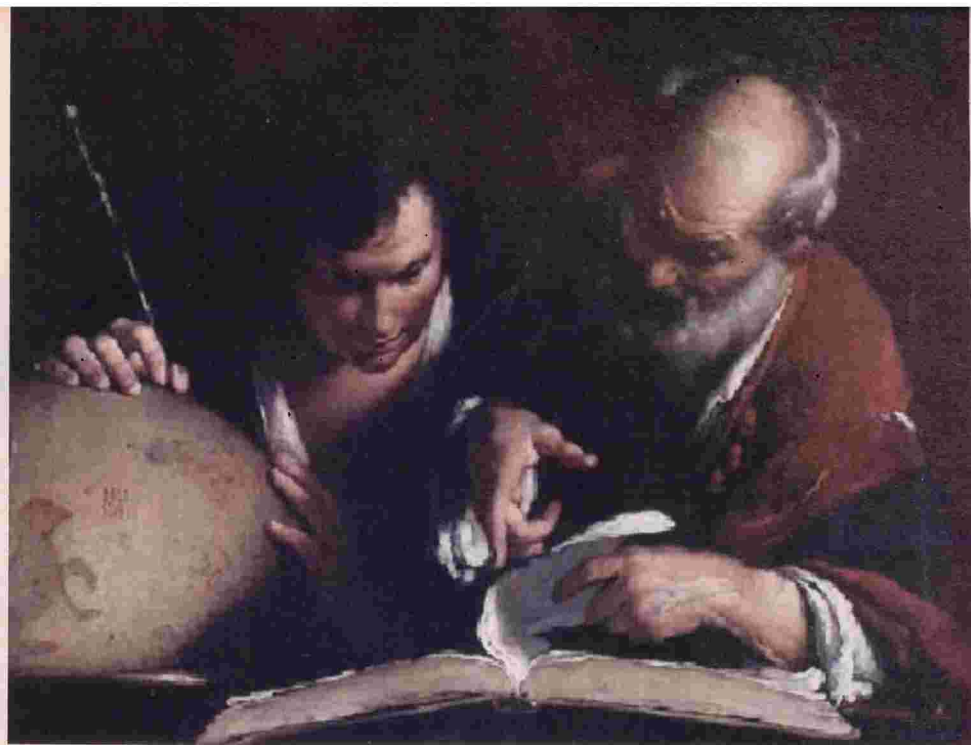
"Enviei-te anteriormente alguns teoremas que eu descobrira, limitando-me a redigir os enunciados e convidando-te a encontrar as demonstrações que eu ainda não tinha indicado. Os enunciados dos teoremas enviados eram os seguintes [...]."

Trecho do prefácio de Método para Eratóstenes, de Arquimedes

de Arquimedes, mas alguns de seus correspondentes passaram uma parte da vida na cidade. O caso de Diocles é menos claro, mas ele conhecia o círculo de alexandrinos pois se referiu também a Cono e Dositéia.

Força de Alexandria

Nenhum tratado anterior ao período helenístico (323-322 a.C.) chegou até nós. Distinguimos dois períodos de atividade para as instituições eruditas de Alexandria: o primeiro, de 300 a cerca de 150 a.C.; e o segundo, de 30 a.C. a 400 d.C. O museu não foi mencionado a partir do século V d.C. Além disso, em 145-144 a.C., por causa de uma disputa de sucessão, Ptolomeu VIII expulsou os sábios



ERATÓSTENES ENSINANDO EM ALEXANDRIA (1635), pintura de Bernardo Strozzi. Entre 235 e 195 a.C., ele foi o bibliotecário-chefe da grande biblioteca

do museu. Por consequência, o nível dos trabalhos em Alexandria baixou e só voltou a sua plenitude no início do período imperial (séc. I d.C.).

Nossos cinco autores faziam parte do primeiro período, cujas obras foram conservadas e os laços com Alexandria eram evidentes. Dessa época subsistem também um tratado de Aristarco de Samos e alguns escritos de Euclides. O primeiro foi ouvinte de Estratão de Lampsaco, preceptor de Ptolomeu II. É provável que Euclides esteve em Alexandria, mas não sabemos a data nem o tempo de permanência. Em contrapartida, entre 150 e 30 a.C., somente alguns tratados foram conservados, dos quais nenhum pode ser qualificado como alexandrino. Mas, a pesquisa matemática não parou nesse período. Um exemplo são os trabalhos de um dos maiores astrônomos da Antigüidade: Hiparco de Nicéia. Infelizmente, sua obra foi quase toda perdida.

O período que corresponde à dominação romana (30 a.C. - 400 d.C.) oferece um retorno. A partir daí, todos os escritos científicos tinham prefácio. Acrescentaram-no até em textos antigos. Entretanto, os geômetras não estavam mais espalhados pela bacia me-

diterrânea e os seis principais autores de obras conservadas do período – Heron, Menelau, Ptolomeu, Diofanto, Papus e Theon – eram alexandrinos.

Difícil não chegar à conclusão de que as obras científicas redigidas e conservadas nesse período (300 a.C. a 400 d.C.) foram aquelas cujos autores tiveram ligações com a capital dos Ptolomeus. Contudo, em nenhum caso essas considerações mostraram a existência de uma escola de matemática em Alexandria, ou seja, de um estabelecimento de pesquisa e de ensino, obedecendo a um programa ou a uma doutrina definida, e onde os sábios citados teriam trabalhado. O matemático Theon de Alexandria foi, que se saiba, o único membro do museu.

O fato é que as instituições eruditas de Alexandria tiveram um papel fundamental na conservação e transmissão do conhecimento matemático. Muitas vezes os textos conservados não provieram das grandes bibliotecas implantadas nos centros políticos (Alexandria, Roma, Constantinopla), expostas às vicissitudes dessas capitais (incêndios, saques etc.). Mas elas selecionaram e reproduziram os textos. Os tratados matemáticos que as instituições de Alexandria preservaram são os que as outras bibliotecas procuravam. (BV)

Euclides,

No século III a.C., o geômetra extraiu do saber grego as mais fundamentais proposições matemáticas e organizou-as em uma obra rigorosa fundada na dedução: os *Elementos*

Em seu comentário ao primeiro livro dos *Elementos* de Euclides, Proclo de Constantinopla (séc. V d.C.) faz alusão a uma época em que seu autor vivia: “Conta-se que certo dia Ptolomeu perguntou a Euclides se não haveria alguma via mais curta que a dos *Elementos* para aprender a geometria. Ao que Euclides lhe respondeu que em geometria não havia ponto de vista real”.

Certos exegetas, otimistas, deduziram que o autor apresentou sua obra ao monarca para lhe pedir favores ou para agradecer. Concluíram que Ptolomeu havia recebido Euclides em seu museu ou que teria fundado a escola matemática de Alexandria. A história seduz, mas é pouco digna de

crédito. Conhece-se outra versão, nos mesmos termos, cujos protagonistas são Alexandre, o Grande e Menecmo de Proconese, discípulo de Eudoxo de Cnido. A existência de outra versão da anedota indica a finalidade: não se tem registros do ensinamento de algum encontro memorável entre dois personagens que se tornaram bem conhecidos, mas do estabelecimento de uma cronologia fundada na contemporaneidade dos sábios com os homens ilustres (soberanos). Não há dúvida de que Alexandre e Menecmo foram contemporâneos, e o mesmo pode se admitir para Euclides e Ptolomeu, o Soter. Mas nada sabemos sobre a vida de Euclides, sua família, sua formação ou quem foram seus mestres.

Não conhecemos nem mesmo sua cidade de origem. Os historiadores modernos não raro o chamam de Euclides de Alexandria, sugerindo que a capital dos ptolomeus tenha sido sua pátria de adoção. Fiam-se na anedota de Proclo, como também em um segundo testemunho, transmitido pelo livro VII da *Coleção matemática*

de Pappus (séc. IV). Em seu livro, Pappus apresenta o *Tratado das cônicas* de Apolônio, do qual comenta o prefácio. Apolônio de Perga ali descreve, com orgulho, o plano de sua obra e observa, com relação ao livro III, que em Euclides o lugar relativo a três e quatro ângulos não se deixa construir nem correta, nem completamente (*ver quadro na pág. 52*). A menção mais antiga feita a Euclides tem conteúdo crítico.

Pappus vê uma certa ausência de *fairplay* que caracteriza a ingratidão: ele diz que se

UM DOS MAIS antigos fragmentos dos *Elementos* de Euclides, encontrado em 1897 no Egito. Contém a proposição 5 do livro II



O

fundador

Apolônio foi mais longe que o autor dos *Elementos*, tal se deve a ter estudado mais tempo em Alexandria com os discípulos de Euclides. Costuma-se deduzir que o próprio Euclides teria lecionado na capital dos ptolomeus.

Enciclopédia Matemática

Ao confrontar diferentes testemunhos, podemos esboçar uma lista das obras de Euclides. A mais conhecida é sua compilação dos *Elementos* em 13 livros, dedicada sobretudo à geometria, mas que inclui três livros de aritmética (teoria dos números). Já evocamos aqui a compilação (perdida) das *Pseudographemata* (falsas provas). Em geometria possuímos também um breve tratado intitulado *Dados* e parte (conservada apenas nas traduções medievais) da obra *Sobre a divisão das figuras*. Euclides redigiu também *Ópticas*, *Elementos de música* e *Fenômenos* (breve tratado sobre astronomia).

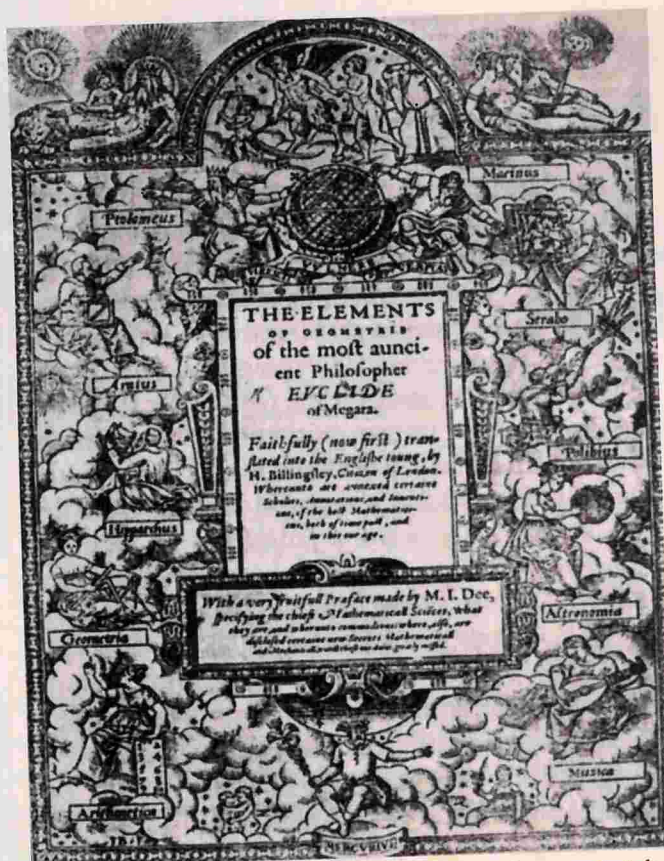
EUCLIDES APRESENTA seus *Elementos* ao rei Ptolomeu, o Soter, em desenho de Alexandre de Bar (fim do séc. XIX). A gravura ilustra a anedota relatada por Proclo: "Não há via real em geometria", teria afirmado Euclides



física). Fragmentos conservados em suas traduções medievais lhe atribuem um estudo do equilíbrio e uma prova (rudimentar) da alavanca. Algumas atribuições são duvidosas, notadamente as dos fragmentos mecânicos. Quanto à divisão do cânone, que foi transmitida com seu nome, não sabemos em que medida ela se relaciona com a obra musical que a Antiguidade lhe atribui.

No entanto, o conjunto se constitui em uma espécie de "enciclopédia" matemática, composta de obras que versam sobre diferentes disciplinas reconhecidas nas classificações das ciências. Em alguns séculos, platônicos e aristotélicos elaboraram diferentes sistemas de classificação das ciências matemáticas, Eudemo de Rodas redigiu a história de três delas, e Euclides produziu um conjunto de tratados que reorganizam e sintetizam os conhecimentos anteriores.

Para alguns historiadores modernos, a reputação de Euclides é exagerada. A seu ver, o matemático seria, na melhor das hipóteses, um redator de manuais ou um editor científico, e na pior, um mero compilador de trabalhos alheios. Se Euclides fosse só um compilador, seria possível esquadriñar os Ele-



FRONTISPÍCIO DE UMA das primeiras edições de Euclides em língua vernácula (o inglês) por H. Billingsley (1570). Euclides é aqui erroneamente designado como o filósofo de Megara, o que era freqüente na Idade Média

mentos para encontrar as contribuições originais. Mas a forma dos escritos lógico-dedutivos torna esse empreendimento quase impossível, e a cacofonia dos estudos que pretendem proceder dessa maneira vem a ser aqui um testemunho.

Esse juízo de modo algum é objetivo. Ele ignora os testemunhos de Apolônio e de Pappus, as indicações sobre as obras perdidas, notadamente os *Porismos*, em três livros, os *Lugares na superfície*, em dois livros e possivelmente os *Elementos das cônicas*, em quatro livros. Em particular, Pappus afirma que a coleção dita *Do lugar analisado* constituiu-se, em essência, por três autores: Aristeu, Euclides e Apolônio. Essa disciplina versava sobre o lugar dos pontos submetidos a condições e incluía, entre outras, a teoria das cônicas, o importante e inovador campo de pesquisas do século III a.C.

A crítica de Apolônio confirma que Euclides trabalhou nas cônicas. Portanto, há nuances no retrato do autor de *Elementos*. Ele era um geômetra competente, ativo em certos domínios "de vanguarda", mas igualmente bem interessado na formação das exposições científicas e na redação de obras de referência..

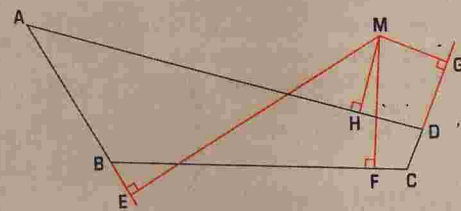
O problema em três ou quatro retas

No prefácio de seu tratado das cônicas, Apolônio critica a solução de Euclides para o problema em três ou quatro retas, que é o seguinte: sejam quatro segmentos quaisquer AB, BC, CD, DA e um ponto M. A partir de M conduzem-se as perpendiculares ME, MF, MG, MH sobre esses quatro segmentos ou seus prolongamentos. O lugar em quatro retas é o conjunto dos pontos M de tal modo que a relação $(ME \cdot MG) / (MF \cdot MH)$ seja dada, ME, MF, MG, MH representando as distâncias do ponto M em relação às retas. Os geômetras gregos não falam do produto das distâncias, mas dos retângulos formados ou contidos por (ME, MG) e (MF, MH).

Da mesma forma, o espaço em três retas, por exemplo AB, BC e CD é o conjunto dos pontos M de tal modo que seja dada a relação do retângulo (ME, MG) com o quadrado descrito sobre MF. Esses dois lugares são cônicas. Cinco séculos depois de Apolônio, Pappus generalizou o problema de diferentes maneiras: de início ele supôs que os ângulos ME, MF, MG, MH não são perpendiculares, mas cortam as retas nos ângulos dados. Isso não altera a natureza dos lugares. Em seguida, ele considerou preferencialmente as retas: já não serão cônicas os lugares então obtidos.

É o primeiro grande problema que Descartes examinou e resolveu por seu método analí-

tico no livro I de sua *Geometria* (1537). Quanto a Apolônio, que tão abertamente criticava a solução de Euclides, não sabemos se o resolveu. Certo é que o tratado das cônicas não traz referências a esse respeito.



artificial. A situação já não é tão grave quando se estuda sob a direção de um mestre competente, que forneça as explicações complementares necessárias. É possível que o geômetra tenha concebido sua compilação não como um manual de ensino, mas como obra de referência a consultar de maneira inteligível. No entanto, ele se tornou um texto escolar, submetido ao trabalho de professores e comentaristas. Uma de suas tarefas era libertar o leitor da linearidade dedutiva, permitir-lhe antecipar, remontar à origem dos problemas. Justamente aqui cabe uma crítica à progressão euclidiana.

Plano Singular

O tratado de Euclides é tão volumoso que necessita de uma divisão de matérias por outros critérios além da estrutura dedutiva que se exerce localmente. Uma das idéias foi reagrupar os resultados conforme os temas abordados. Distinguem-se então três grandes subconjuntos de livros: “planos”, “aritméticos” e “estereométricos” (ver figura na pág. 57), cujos objetos são, respectivamente, a figura plana, o número e a figura sólida.

A redução em elementos privilegia as figuras mais simples: triângulos, quadrados, retângulos, paralelogramos e trapézio nos livros I e II; círculo e seus segmentos no livro III; alguns polígonos regulares inscritos em uma esfera no livro IV. Da mesma forma, as figuras sólidas de base são os

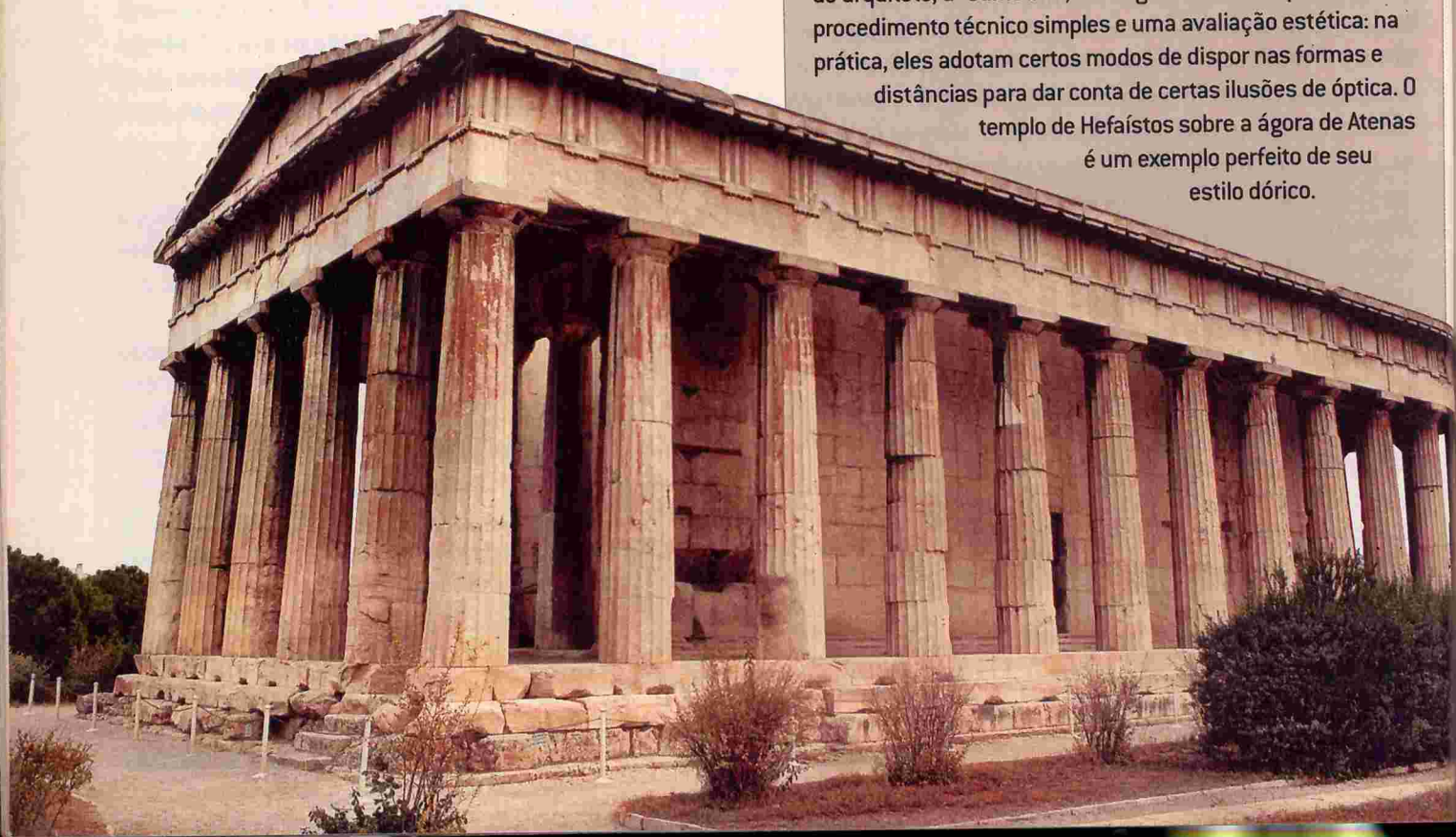
cinco sólidos regulares circunscritos por uma esfera (livro XIII), os paralelepípedos e os prismas (livro XI), as pirâmides, os cones e os cilindros (livro XII).

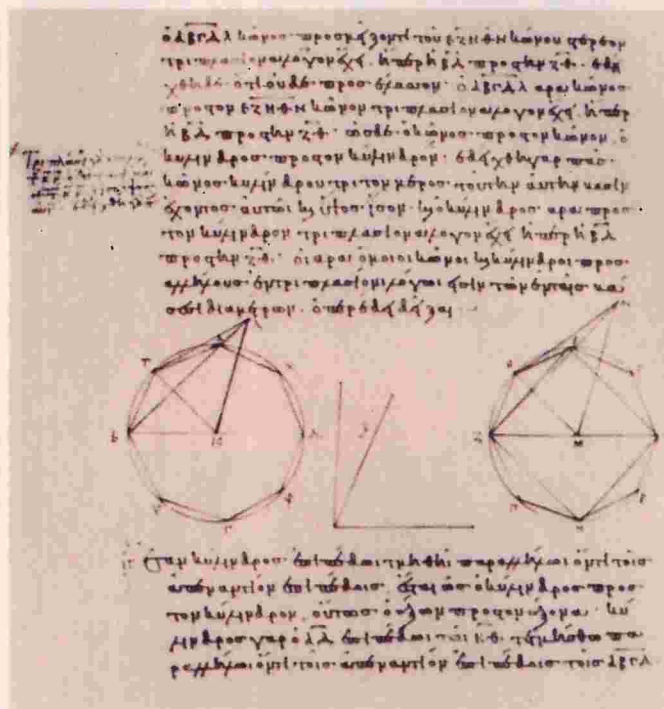
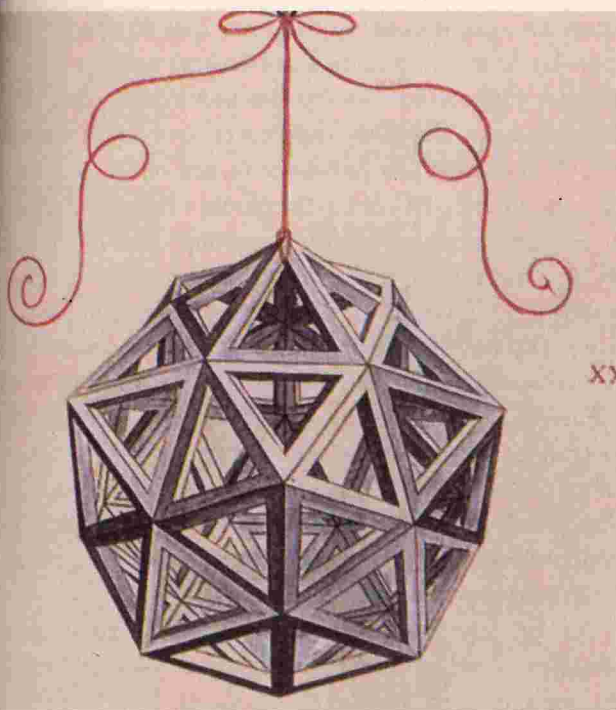
Após essa divisão, três ou quatro aspectos surpreendem: 1. a obra começa pela geometria, enquanto a aritmética geralmente é considerada a primeira ciência matemática, e seus objetos, desprovidos de posição, mais simples. 2. A exposição de geometria plana é interrompida por um livro de outro gênero, o quinto, que trata de relação e proporcionalidade entre objetos. Além disso, esse livro é de um nível de abstração incrivelmente elevado se comparado aos anteriores. 3. Outro livro peculiar é o X. Nem mesmo é possível descrevê-lo quanto a seus objetos: ele mescla linhas, áreas e números. Como o livro V, ele trata de relações: as de co-

Arquitetura, a arte das proporções

As diferentes ordens arquitetônicos distinguem-se por grande número de detalhes de construção e decoração. Todavia, sua prática da arquitetura modular repousa em parâmetros característicos. Em tese, todas as dimensões de partes do templo se exprimem em função de uma unidade, ou módulo, ou como um múltiplo, ou como submúltiplo — as duas categorias mais simples de relações numéricas. Na ordem iônica, o módulo é o diâmetro da coluna, na ordem dórica é o raio. Desse modo, o arquiteto garantia que todas as partes de sua construção fossem comensuráveis. O trabalho do arquiteto, a “sumetria”, abrange a um só tempo esse procedimento técnico simples e uma avaliação estética: na prática, eles adotam certos modos de dispor nas formas e distâncias para dar conta de certas ilusões de óptica. O templo de Hefáistos sobre a ágora de Atenas é um exemplo perfeito de seu estilo dórico.

TEMPLO DE HEFÁISTOS, na ágora de Atenas, cujas proporções foram determinadas por um parâmetro único





À ESQUERDA, *Duodecedron vacuus*, desenho de Leonardo da Vinci para a obra *De divina proportione* (1509), em que Luca Pacioli cita os *Elementos* de Euclides, particularmente a proporção ou razão áurea (que ele chama de divina), e os sólidos regulares e semi-regulares. À direita, manuscrito grego dos *Elementos* com o fim da prova da proposição XII-12. A partir da Renascença, os editores modernos passaram a acrescentar entre parênteses os números das proposições utilizadas no curso da demonstração. Sem essas minúcias, era simultaneamente exercício de memória e de lógica. Com o tempo, diversas indicações para auxiliar o leitor – os “escólios” – foram inseridas nas margens dos manuscritos gregos. Aqui, na margem esquerda, um leitor ou um corretor [a letra não é do copista] acrescentou uma justificação para que se remetesse à proposição XII-10, utilizada nessa passagem. Certos escólios se tornaram porções do texto por ocasião de suas sucessivas cópias. O mesmo tipo de acréscimo aparece em outros manuscritos dos *Elementos*

mensurabilidade e incomensurabilidade, abordadas de um ponto de vista geral, e depois aplicadas a retas e áreas retilíneas simples. Além disso, a segunda parte do livro é uma impressionante classificação de retas e áreas ditas irracionais – cerca de 90 proposições, ou seja, um quinto do tratado. Isso foi considerado indigesto, ainda mais porque nada o justificava seqüência. 4. A exposição estereométrica se conclui por uma comparação dos cinco sólidos regulares que parece incompleta.

Teorias de Proporções

Outro fato que recebeu críticas é que a obra contém não uma teoria das proporções, mas duas. A segunda é exposta nas 22 primeiras proposições do livro VII. Como consequência, certos resultados são demonstrados duas vezes.

Assim, a proposição V-16 estabelece que “se quatro grandezas estão em proporção, de maneira alternada elas estarão também em proporção”, enquanto VII-13 prova que “se quatro números estão em proporção, de maneira alternada também eles estarão em proporção”. Em notações modernas: “se $A/B = C/D$ então $A/C = B/D$ ”, pois “(A, B, C, D) estão em proporção” não significa nada mais que “(A, B) estão na mesma relação que (C, D), isto é, $A/B = C/D$ ”.

A transcrição apaga as diferenças: em nossa escrita simbólica, as letras A, B, C e D designam não importa qual tipo de objetos suscetíveis de entrar em uma proporção. Todavia, se o leitor retomar os enunciados antigos, vai constatar sem nenhum esforço que a diferença entre V-16 e VII-13 é que a primeira versa sobre grandezas (*megethos* em grego), a segunda sobre números (*arithmos* em grego).

A noção de “número” é definida como uma pluralidade determinada de unidades, isto é, do que é usado para fazer uma enumeração (2, 3, 4, 5... os inteiros naturais). Nem frações nem números irracionais têm lugar na aritmética grega. Já a noção de grandeza é menos clara. Trata-se, originalmente, de uma das propriedades fundamentais da figura geométrica: seu formato. Euclides não o define, mas se vê, na continuidade do tratado, que ele considera sob esse termo as linhas, as superfícies, os volumes e os ângulos retilíneos. Isso quer dizer que ele tem em vista um objeto geométrico abstrato, independentemente das dimensões. Aristóteles o aplica ao tempo, ao peso e a outras grandezas físicas. Para ele, a diferença entre “número” e “grandeza” é constitutiva: a segunda é indefinidamente divisível, enquanto a divisão do primeiro se detém na unidade.

O mistério das duas teorias das proporções poderia en-



tão estancar aí: uma vez que há dois tipos de objetos distintos — o número e a grandeza — é natural que haja duas teorias das proporções. Mas há um porém: no início de seu segundo livro, Euclides “demonstra” que se duas grandezas, A, B têm uma medida comum, sua relação A/B será a de certo número M com outro número N.

Por exemplo, se A e B são dois comprimentos, A medindo 3 metros e B, 5, a relação entre A e B será a relação dos números 3 e 5. Os geômetras antigos diziam que A é para B o que 3 é para 5. Ou seja, as relações de grandezas comensuráveis identificam-se com as de números. E as relações entre números servem para exprimir as relações entre certos tipos de grandezas. No exemplo acima, os comprimentos têm uma relação exprimível de 3 para 5. Em compensação, o lado e a diagonal de um quadrado têm uma relação que não se pode exprimir com a ajuda dos números (inteiros). Para nós, a relação corresponde ao número irracional $\sqrt{2}$.

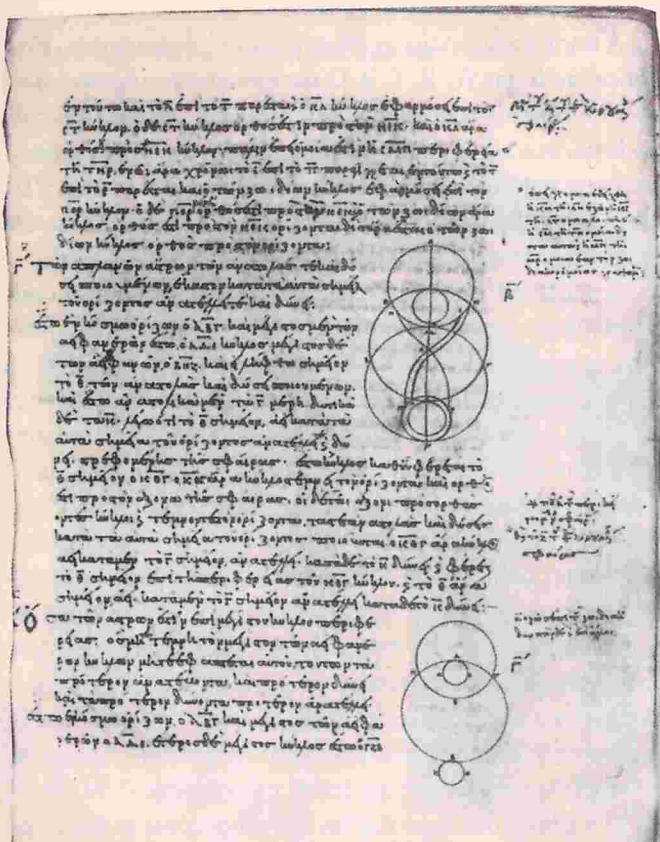
De uma perspectiva moderna, o fato de que uma relação entre grandezas comensuráveis identifica-se a uma entre números corresponde, *grosso modo*, ao fato de que os números racionais positivos (frações) constituem um subconjunto de números reais positivos. Daí a considerar que a teoria de proporções do livro VII não passa de um caso particular, redundante, da primeira. Desde o século XVI, autores como Francisco Maurolyco e Gilles-Personne de Roberval propõem a unificação dessas teorias.

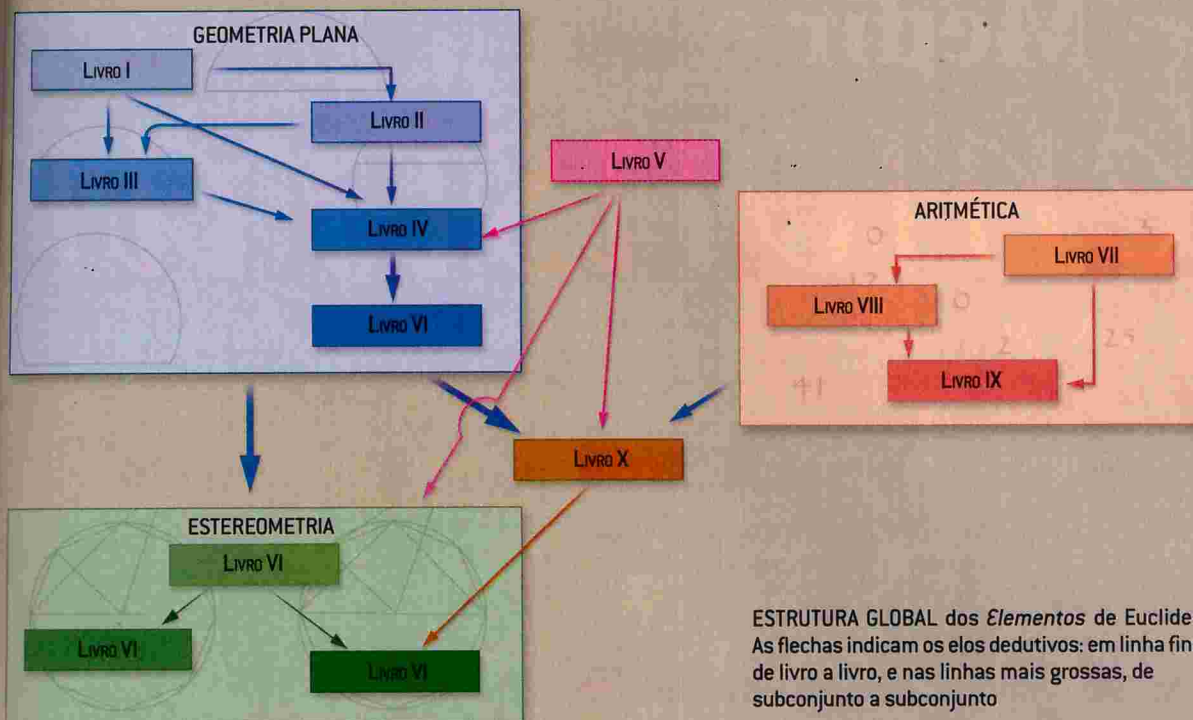
Crise dos Fundamentos

No final do século XIX, alguns historiadores, mobilizados por essas singularidades, elaboraram uma grade de leitura dos *Elementos*. Na época, os matemáticos atravessavam uma crise de fundamentos, ligada aos paradoxos surgidos com a então recente formalização da teoria dos conjuntos.

Os historiadores perceberam que a descoberta de grandezas incomensuráveis havia engendrado o mesmo tipo de “crise” na Grécia Antiga. Antes, os geômetras antigos, supondo que todas as grandezas fossem comensuráveis, haviam utilizado uma teoria das proporções simples, aquela cujo traço apareceria depois no livro VII. Com a descoberta de segmentos incomensuráveis (como a diagonal de um quadrado que tenha por lado a unidade), que revelaram as falhas da teoria, ela foi posta de lado durante algum tempo. Depois surgiu uma nova teoria, a registrada no livro V, geralmente atribuída a Eudoxo de Cnidos (contemporâneo de Aristóteles), que se aplicava às grandezas comensuráveis e incomensuráveis, ainda que a distinção entre elas só

ACIMA, RETRATO DE Euclides por Juste de Gand (século XV). Ao lado, manuscrito dos *Fenômenos* de Euclides, obra de astronomia dedicada às ascensões e declínios de algumas estrelas e à variação da duração do dia em função da época do ano e da latitude





fosse introduzida no livro X. Essa distinção justifica a *posteriori* o tratamento elaborado no livro V. Euclides teria aplicado a teoria eudoxiana às figuras planas no livro VI e aos sólidos nos livros XI a XIII. No entanto, ele teria mantido parte da antiga teoria em seu livro VII.

Quanto às singularidades do plano euclidiano, podemos explicá-las de outra forma. Vimos já que tal se dava pelo duplo tratamento da proporcionalidade: os antigos privilegiavam os objetos sobre as relações entre eles. E uma vez que há dois tipos de objetos, é legítimo ter duas teorias de proporções, ainda que o objetivo, na seqüência, seja o de ver quando podem ser coordenadas (caso das grandezas comensuráveis) e quando isso não é possível (incomensuráveis).

Além disso, a leitura atenta do tratado mostra que a inserção de uma proposição se faz o mais próximo possível do local onde ela será utilizada. Por exemplo, como os irracionais só aparecem no livro XIII, parte dedicada aos sólidos, Euclides inseriu a noção de incomensurabilidade no livro X, justamente antes do tratamento dos sólidos. Essa é, pois, a razão, pela qual a introdução da distinção “comensuráveis/incomensuráveis” até ali se diferencia. Da mesma forma, as noções aritméticas só aparecem no livro X, e os livros aritméticos são inseridos imediatamente antes: ainda que haja um interesse específico pelo assunto em *Elementos*, a razão da existência dos livros VII a IX é seu uso instrumental no estudo da irracionalidade.

Enfim, Euclides se conforma com uma atitude que, segundo Aristóteles, é própria aos matemáticos: em uma ciência demonstrativa, os princípios não demonstrados devem ser tão pouco numerosos quanto possível. Ou seja, se não é necessário usar a teoria das proporções entre grandezas e suas difíceis definições para estabelecer certos resultados, então é melhor dispensá-las.

Assim, Euclides reagrupa nos livros de I a IV todos os resultados que não necessitam dessa teoria, enquanto o sexto livro se ocupa de noções, como a da semelhança de figuras, pelas quais é inevitável o recurso à teoria das proporções. Euclides leva bem longe essa atitude ao reagrupar, nas 28 primeiras proposições de seu livro I, as que não dependem de sua quinta demanda ou postulado de paralelos (tem-se, em substância, que duas retas de um mesmo plano se encontram em um ponto se não formarem, com uma terceira reta, ângulos cuja soma valha dois ângulos retos).

Essa atitude explicaria também por que a estereometria euclidiana é tão mal fundada. Muitas das primeiras proposições do livro XI (1, 2, 3, 7) apresentam provas pouco convincentes: ao que parece, Euclides estava persuadido de poder reduzir logicamente a estereometria à geometria plana sem a introdução de novos postulados. A exposição de Euclides está longe de ser perfeita. No entanto, as singularidades de sua estrutura não se explicam, ou pouco se explicam, pela história das matemáticas pré-euclidianas, como crêem os partidários da leitura arqueológica; elas resultam das escolhas matemáticas e epistemológicas dos *Elementos*. (BV)

Medir e demonstrar

No primeiro livro de seus Elementos, Euclides posiciona as bases teóricas do cálculo das áreas poligonais. Estaria interessado nos problemas práticos dos agrimensores?



LAVRADOR COLHENDO milho, em amuleto da cultura greco-egípcia, século I a.C-I d.C.

Eudemo de Rodas (século IV a.C.) afirma que a igualdade de dois triângulos detentores de um lado igual e de dois ângulos iguais – objeto da proposição I-26 dos *Elementos* de Euclides – já era conhecida por Tales de Mileto. Pois Tales, escreve Eudemo, deve tê-la utilizado no método que elaborara com o intuito de determinar, a partir da margem de um lago ou de um rio, a distância de um bote que dela se aproxima.

Transmitido por Proclo, esse testemunho nos ensina duas coisas: 1) Eudemo – como também muitos historiadores modernos – procedia por reconstrução racional: se Tales tivesse inventado algum método, ele deveria conhecer todos os resultados geométricos que esse método pressupõe. Tal dedução é evidentemente incerta. 2) Para Eudemo, isto é, para a tradição (pseudo) histórica, o interesse da geometria residia na possibilidade de determinar a distância de pontos.

O historiador Heródoto sugeriu que a geometria havia se originado com a agrimensura dos egípcios, isto é, com a medida das superfícies. De fato, eles usavam procedimentos por vezes sumários e aproximativos. Para avaliar a área de um quadrilátero qualquer ABCD, em vez de dividi-lo em dois triângulos, eles se contentavam em medir os lados e multiplicar as metades das somas dos lados opostos: $(AB+CD)/2 \times (BC+DA)/2$ (o que redundava em assimilar o quadrilátero a um retângulo que tivesse como lados as metades dessas somas).

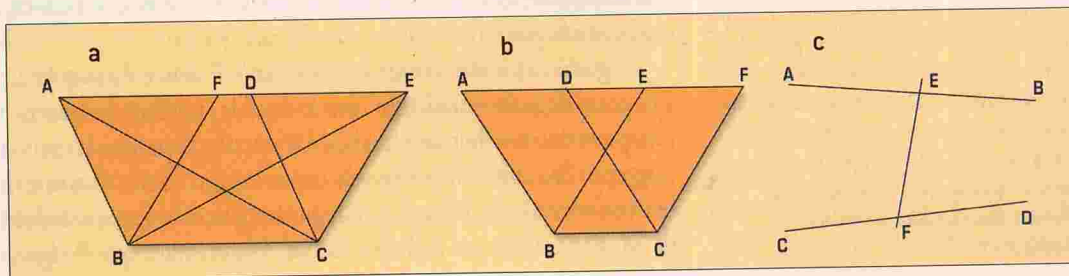
Isso quer dizer que havia um meio de combinar a agrimensura e a geometria teórica. Uma das tarefas da geometria aplicada é precisamente a de medir certas grandezas de maneira indireta: a profundidade de um canal, a altura de uma montanha, o afastamento entre o observador e um ponto inacessível. Heron

de Alexandria desenvolveria sistematicamente esse ponto de vista no século I d.C., em seu tratado da *Dioptria*. Assim como Euclides, ele primeiro explicava os procedimentos elementares para em seguida combiná-los para resolver questões complexas. Heron utilizou tanto instrumentos (o dioptra e diferentes tipos de régua) quanto a proporcionalidade dos lados entre triângulos semelhantes, propriedade que, no ensino básico é chamado hoje como “teorema de Tales”.

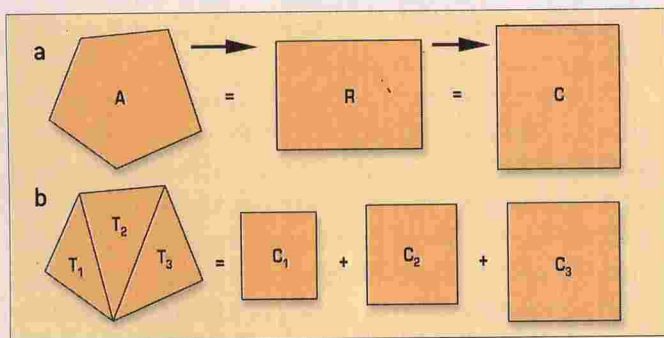
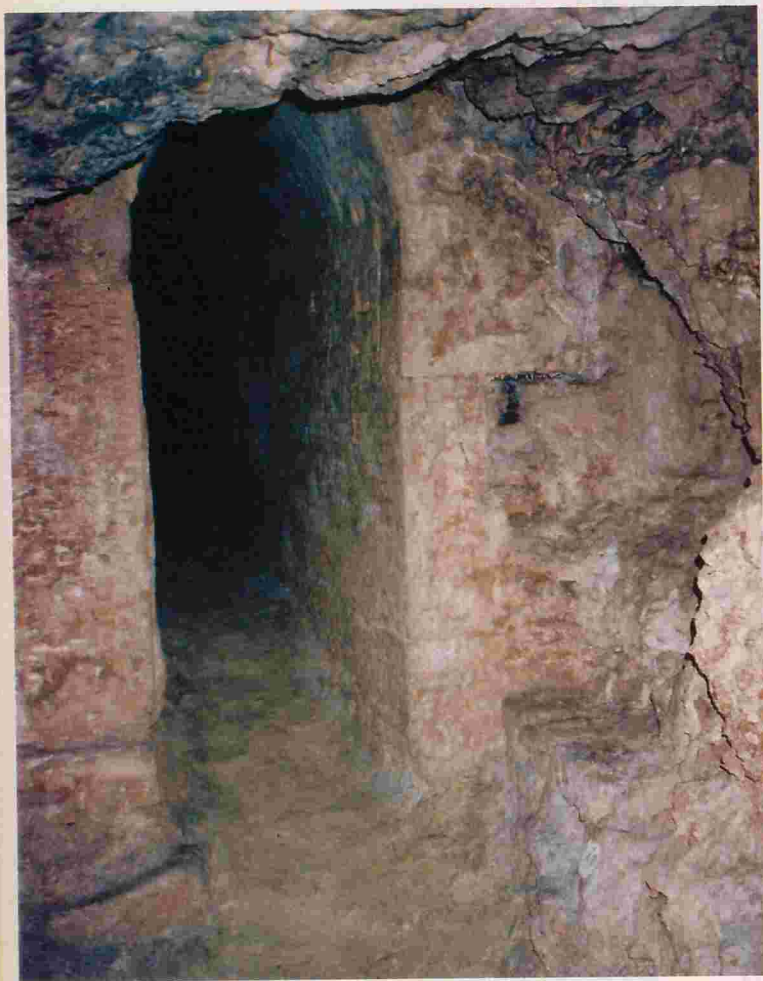
Evolução da Medida

Boa parte da obra de Heron é dedicada a uma série de questões cujo objetivo é conduzir a água de um ponto A a um ponto B, havendo a necessidade de cavar um canal através de uma montanha, em linha reta a partir das duas entradas dadas, e das embocaduras de aeração. Isso faz menção de uma bela realização técnica da época arcaica, o túnel de Eupalinos de Megara, cavado na ilha de Samos, cerca de 530 a.C. Destinado ao abastecimento de água da cidade, chegou ao comprimento de 1 km. A escavação foi empreendida simultaneamente por duas equipes, de ambos os lados da montanha.

É fácil compreender que engenheiros, mecânicos ou arquitetos dêem conta de suas práticas mostrando como elas se apóiam em certos resultados de geometria teórica; é o meio de aumentar o seu prestígio, de fazer reconhecer a um só tempo a utilidade e a tecnicidade de seus saberes. Mas também estariam os geômetras inquietos quanto às possibilidades de aplicação de seus resultados? Já acompanhamos a sua opção por formulações abstratas: mais do que da medida de uma área, falam em “quadratura”. No entanto, um passar de olhos sobre o primeiro livro dos *Elementos* mostra que Euclides desejou estabelecer um lugar constitutivo



- a) A área do paralelogramo ABCD é duas vezes a do triângulo BCE.
b) Os paralelogramos ABCD e EBCF são iguais. c) Demanda nº 5 de Euclides: se a soma dos ângulos BEF e DFE é inferior a 180° , as retas AB e CD seccionar-se-ão do lado de B e D



ACIMA, O TÚNEL DE Eupalinos, em Samos. A escavação, empreendida de ambos os lados da montanha, pressupõe habilidade para manter um alinhamento dos dois buracos e um declive destinado a facilitar o escoamento da água. Alguns viram aí uma ilustração do ensinamento de Pitágoras, nativo de Samos. De fato, Pitágoras deixou sua cidade, fugindo da tirania de Polícrates. E o arquiteto Eupalinos era de Megara, não de Samos. Os procedimentos descritos por Heron mobilizam poucos conhecimentos geométricos. Embaixo, dois métodos euclidianos para tornar quadrada uma figura retilínea: a) a proposição I-45 dá o retângulo R equivalente em área a uma figura retilínea A, em seguida a proposição II-14 fornece o quadrado C equivalente a R. b) Um polígono P é divisível em triângulos T_i . Se conhecemos os quadrados C_i equivalentes a esses triângulos e o quadrado equivalente à soma de dois quadrados, obteremos o quadrado equivalente ao polígono P

entre a quadratura dos polígonos e o modo dedutivo de proceder. Sua intenção era sistematizar a geometria aplicada, conferir-lhe bases teóricas. Sigamos Euclides passo a passo.

Na proposição II-14, o autor de *Elementos* resolve o problema da quadratura dos polígonos: “Construir um quadrado igual a uma figura retilínea [A] dada”. Para fazê-lo, ele procede em dois tempos: supõe ter encontrado um retângulo R igual à figura A, — ele explicou como proceder na proposição I-45 — e depois demonstra como encontrar um quadrado C de área igual à do retângulo R, que termina a quadratura (ver figura “a” no quadro ao lado, abaixo).

Com I-45, a quadratura de quaisquer figuras retilíneas é reduzida a um caso particular: a quadratura dos retângulos. É possível considerar as coisas de outra maneira. Toda figura retilínea pode ser decomposta em triângulos — por exemplo, um pentágono é composto de (no mínimo) três triângulos (ver figura “b” ao lado).

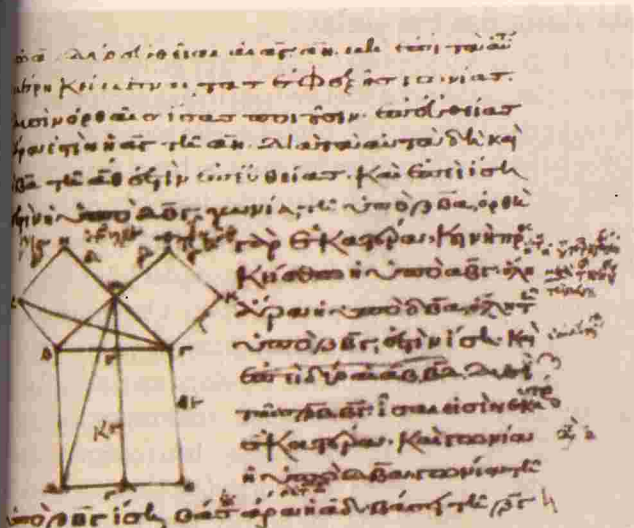
Supõe-se que se saiba encontrar um quadrado equivalente em área a um triângulo. Para resolver o problema da quadratura das áreas retilíneas, basta determinar como obter um quadrado equivalente à soma de dois (três, quatro, cinco...) outros quadrados. Por associação, basta saber fazê-los para dois quadrados e o problema se reduz à questão: “Como encontrar um quadrado equivalente à soma de dois dados quadrados?”.

A resposta se encontra em uma das mais célebres proposições de Euclides, o teorema dito da hipotenusa (I-47, ver quadro na pág. 61): “Nos triângulos retângulos, o quadrado sobre o lado oposto ao ângulo reto é igual aos quadrados sobre os lados contendo o ângulo reto”. Euclides estabelece não só esse teorema, mas a sua recíproca. A propriedade é, portanto, característica da espécie “triângulo retângulo”.

Do ponto de vista prático, há interesse nessa recíproca. Como diz o arquiteto romano Vitruvius, tomando três réguas de 90, 120 e 150 cm, é possível construir um esquadro exato, descoberta bastante útil para a construção de graus de uma escala. A determinação de tais trincas de números (a, b, c) tais que $a^2 + b^2 = c^2$ já era conhecida dos babilônios.

Eudemo havia tentado determinar os teoremas geométricos que Tales, segundo ele, não podia ignorar. Outros fizeram o mesmo por Pitágoras e lhe atribuem a descoberta do teorema que ainda hoje leva o seu nome. Associava-se a pretensa descoberta de Pitágoras a um sacrifício de sangue (segundo a lenda, ele teria sacrificado cem bois para celebrar seu teorema). Mas, essa prática era proibida pelos preceptores da seita pitagórica.

Segundo as fontes clássicas (Heródoto, Platão e Aristóteles), Pitágoras tinha inventado um “modo de vida” fundado em múltiplas prescrições religiosas e práticas de rituais, na crença na transmigração das almas, na recusa de certos cultos cívicos, mas também na vontade de influenciar o regime político de certas cidades da Magna Grécia (sul da Itália, Sicília). Nada indica que Pitágo-

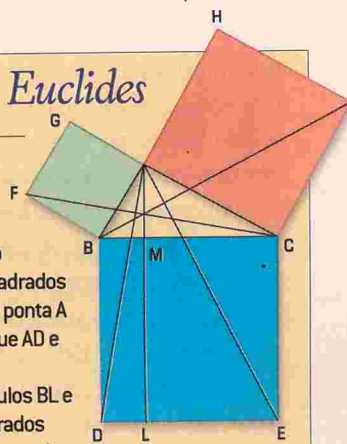


A proposição I-47 de Euclides

"Seja o triângulo retângulo ABC tendo o ângulo reto BAC. Digo que o quadrado sobre BC é igual aos quadrados sobre BA, AC. Com efeito, se por um lado o quadrado BDEC é descrito sobre BC, por outro os quadrados GB, HC são sobre BA, AC; e digo que pela ponta A seja conduzida AL, paralela a BD e CE. E que AD e FC sejam cruzadas."

Euclides demonstra então que os retângulos BL e CL são respectivamente iguais aos quadrados ABFG e ACKH. A soma dos dois retângulos sendo o quadrado BDEC, este será então igual à soma dos quadrados ABFG e ACKH.

AO LADO, MANUSCRITO grego dos *Elementos* de Euclides: a prova do teorema da hipotenusa [I-47]



ras tenha se dedicado à geometria. Mesmo Proclo não esconde seu ceticismo e insiste na perfeição da prova de Euclides.

O estilo do geômetra possui certas características passíveis de ser encontradas já nos fragmentos de Hipócrates: exposição sintética, forma dedutiva, combinação de um texto e de um diagrama letrado tornando um e outro indispensáveis à demonstração. As letras são as únicas partes do discurso matemático que não pertencem à língua natural. Euclides não faz uso de símbolos, e seu discurso recorre apenas a uma reduzida parcela da língua grega, pelo uso que faz de frases estereotipadas. Ele designa as figuras de modo econômico. Por exemplo, fala do quadrado BDEC (ver quadro acima), pois todos esses vértices são mencionados no texto, porém designa os quadrados sobre AB e sobre AC por somente dois vértices opostos, respectivamente BG e HC, e isso lhe basta.

O Teorema por Euclides

O cerne da demonstração consiste em estabelecer que o retângulo BL e o quadrado ABFG são iguais, já que a área de cada um é o dobro da área de triângulos iguais, ABD e FBC. Euclides estabelece a igualdade prévia dos dois graças a uma proposição sobre a igualdade dos triângulos (I-4): nossos dois triângulos têm dois lados iguais a dois lados, os quais contêm ângulos iguais. Ele já havia provado a igualdade desses ângulos ao mostrar que se tratava das somas de dois ângulos iguais dois a dois. De uma perspectiva moderna, a igualdade dos triângulos decorre do fato de que eles se deduzem um do outro por uma rotação de 90 graus. A sequência da demonstração de Euclides é simples: o retângulo CL chega mesmo a ser igual ao quadrado ACKH (detalhes não são contemplados por Euclides). A reunião dos retângulos BL e CL constituindo o grande quadrado BDEC, este haverá de ser, pois, igual aos dois quadrados BG e HC.

Mas de que modo Euclides justifica que o retângulo BL (respectivamente o quadrado BG) seja duplo do triângulo ABD (FBC)? Tal é estabelecido em um teorema anterior mais geral que combina triângulos e paralelogramos, a proposição I-41: sejam um paralelogramo ABCD e um triângulo BCE (que têm a mesma base BC) "situados nos mesmos paralelos BC e AE" (ou seja, A, D e E estão alinhados sobre uma reta paralela a BC, (ver figura "a" na pág. 59), enquanto ABCD é o duplo do triângulo BCE.

Antes de seguir adiante na prova de I-41, é preciso verificar que ela se aplica em I-47, por exemplo, para o quadrado BG e para o triângulo FBC (ver o enquadramento em sentido contrário). Dois pontos são evidentes: o quadrado BG é um paralelogramo, isto é, uma figura "de linhas paralelas". Idem para o retângulo BL. Além disso, FBC e BG possuem a mesma base, BF. Resta verificar que eles estão nas mesmas paralelas.

As retas FB e GA são paralelas (por construção BFGA é um quadrado). Basta então mostrar que o vértice C está sobre o prolongamento da reta GA. As retas GA e AC, com efeito, teriam podido constituir uma linha quebrada (em A) — não é o caso. Euclides observa: "Uma vez que cada um dos ângulos sob BAC, BAG é reto então relativamente a certa reta: BA, e em um ponto A que está sobre ela, as duas retas [segmentos] AC, AG, não posicionadas do mesmo lado, formam ângulos adjacentes iguais a dois retos. Portanto, CA está alinhado com AG. Então, pela mesma razão, BA também está alinhado com AH".

Nada mais impede que utilizemos o resultado contido em I-41 para estabelecer o teorema da hipotenusa. Graças a esse teorema — a proposição I-47 de Euclides — saberemos encontrar a "soma" de dois quadrados dados sob a forma de um quadrado — bastará construir o triângulo retângulo no qual os lados do ângulo reto são os lados de cada um dos dois quadrados a somar: a hipotenusa do triângulo será então o lado do quadrado "soma". Da mesma forma, para calcular sua diferença, poremos

o lado do quadrado maior como hipotenusa de um triângulo retângulo, e o lado do menor como um dos lados do ângulo reto; o lado que restar será o do quadrado equivalendo à diferença dos dois quadrados dados.

Voltemos à prova de I-41. Euclides junta a diagonal AC (ver figura a na pág. 59). Assim, ele constrói o triângulo ABC que também tem BC por base e se situa nos mesmos paralelos. Feito isso, enuncia duas asserções das quais advém o resultado. a) Os triângulos ABC e EBC, por terem a mesma base e estarem nas mesmas paralelas, são iguais. b) O triângulo ABC é a metade do paralelogramo ABCD, porque AC é a diagonal e porque a diagonal de um paralelogramo o secciona em duas partes iguais.

Essa segunda propriedade é bastante simples e advém da igualdade dos triângulos ABC e ADC. Ela tem uma consequência interessante: seja, sobre a figura "a" (pág. 59), o ponto F de modo que EF = BC. O quadrilátero BCEF é um paralelogramo, também ele sobre a mesma base e nas mesmas paralelas que ABCD, ABC e ADC; BE é a sua diagonal. Segundo (b), o triângulo EBC, portanto, é a metade do paralelogramo BCEF. Assim, se a afirmação (a) for verdadeira, a asserção (c):

Postulado das Paralelas

Tendo chegado à proposição I-35, é fácil generalizá-la em duas direções: 1) Se paralelogramos ou triângulos têm bases iguais e se estão nas mesmas paralelas, eles são iguais entre si. 2) Se paralelogramos ou triângulos têm bases desiguais e se estão nas mesmas paralelas, eles serão desiguais, e o maior será o de base maior.

A primeira generalização é feita nas proposições I-36 e I-38; a segunda é pressuposta na proposição VI-1: "Os paralelogramos ou triângulos situados nas mesmas paralelas estão entre si como sua base", a qual, por sua vez, é o elemento essencial de toda a teoria das proporções entre figuras semelhantes, exposta nos livros VI (figuras planas) e XI (sólidos). Isso confirma o caráter elementar de I-35, pedra fundamental do último terço do livro I. Sua prova compõe uma das principais etapas do livro I.

Essa proposição enuncia-se da seguinte forma: "Sejam ABCD e EBCF paralelogramos sobre a mesma base BC, e nas mesmas paralelas AF, BC (ver figura b na pág. 59). Digo que o paralelogramo ABCD é igual ao paralelogramo EBCF."

Distinguem-se diferentes elementos em sua demonstração, recorrendo a diversos resultados anteriores:

I-33: para afirmar que, uma vez que ABCD e EBCF são paralelogramos, tem-se: $AD = BC$ e $BC = EF$;

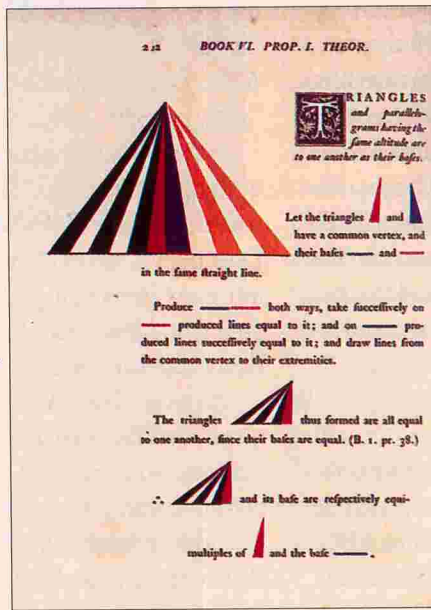
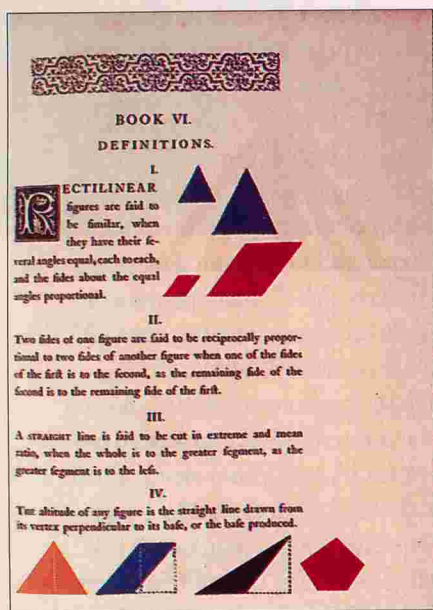
I-29: para estabelecer a igualdade dos ângulos FDC e EAB, porque as retas AB e CD são paralelas;

I-4: para mostrar que os triângulos EAB e DFC são iguais.

Poderíamos dar seqüência a nosso percurso regressivo buscando os elementos mobilizados nessas proposições. Sem entrar em detalhes, contentemo-nos com uma observação sobre a proposição I-29, que afirma: "Se uma linha reta cai sobre retas paralelas, ela faz (i) ângulos alternos iguais e também (ii) o ângulo exterior igual ao ângulo interior e oposto e (iii) os ângulos interiores e do mesmo lado iguais a dois retos $[180^\circ]$ ". É 29(ii) que é utilizado em I-35 para estabelecer nossa igualdade angular; a proposição I-29(i) o é em

I-34 para o mesmo gênero de inferência. A proposição I-29 de fato quase equivale ao célebre postulado dito das paralelas (*Demanda nº 5 de Euclides, ver figura c da pág. 59*): "Se uma reta caindo sobre duas retas faz ângulos interiores e do mesmo lado menores que dois retos, as duas retas, indefinidamente prolongadas, encontram-se do lado onde estão os ângulos menores que dois retos".

Esse postulado intervém na prova de I-29(i) e não é mais que seu contraposto (em uma proposição "se X então Y",



OS ELEMENTOS, em edição de 1847, feita pelo matemático Oliver Byrne. Reúne os seis primeiros livros, que tratam de geometria plana e da teoria das proporções

"Os paralelogramos de mesma base e situados nas mesmas paralelas são iguais entre si", também o é, e reciprocamente.

Em resumo, "os paralelogramos ou triângulos de mesma base e situados nas mesmas paralelas são iguais entre si". Euclides trata os casos "triângulos" (a) e "paralelogramos" (c) separadamente, nas proposições I-37 e I-35. Quanto à asserção (b), é demonstrada em I-34. Os teoremas I-34 e I-35 são os fundamentos da teoria da equivalência em área, notadamente contida nas proposições I-37, 41, 42, 47 e II-14.

seu contraposto é “se não Y, então não X”). Com efeito, supomos que os ângulos alternos, AEF e EFD não são iguais, que AEF é o maior. Então, a soma dos ângulos AEF e BEF (dois retos) será maior que a soma dos ângulos BEF e EFD. Em consequência, segundo o postulado das paralelas, as retas AB e CD se reencontrarão. Mas na hipótese de I-29 elas são paralelas.

É provável que Euclides tenha escolhido sua formulação — bem mais complexa — do postulado das paralelas tendo em vista sua utilização na demonstração de I-29. É esse, aliás, o primeiro uso: as 28 primeiras proposições do livro I não dependem do que por vezes se denomina geometria “absoluta”, mas pertencem a ela. Se Euclides tivesse escolhido uma formulação mais simples (“por um ponto não situado em uma reta passa uma paralela, e uma só, a essa reta”), não é certo que tantos geômetras, desde a Antiguidade, tenham tentado demonstrar essa asserção que, como sua contraposta I-29(i), para eles assumia a feição de um teorema.

Mas voltemos à proposição I-35. Outros ingredientes intervem em sua prova (ver a figura b na pág. 59): Euclides parte da igualdade das duas retas AD, EF a uma mesma terceira, BC, para delas deduzir que são iguais entre si. Essa transitividade é posta na Noção Comum 1: “As coisas iguais a uma mesma coisa são também iguais entre si”.

Acrescentando DE a cada uma delas, deduz-se que $AE = DF$. Essa compatibilidade da igualdade com a adição é posta na Noção Comum 2: “E se, as coisas iguais são acrescentadas coisas iguais, os todos são iguais”.

Tendo estabelecido (por I-4) que os triângulos ABE e DCF são iguais, ele cerceia sua porção comum — o triângulo DGE — e daí deduz a igualdade dos quadriláteros ADGB, EGCF. Essa compatibilidade da igualdade com o cerceamento é posicionada na Noção Comum 3: “E se, a partir de coisas iguais, coisas iguais são cerceadas, os restos são iguais”.

Enfim, para chegar à igualdade buscada dos paralelogramos ABCD e EBCF, ele acrescenta o triângulo BGC a cada um dos quadriláteros. Utilizou então, ainda uma vez, a compatibilidade



EUCLIDES, em gravura de 1661

com a adição posicionada na Noção Comum 2, não mais para linhas, mas desta feita para áreas.

Assim, a proposição I-35 requer as três Noções Comuns (ou axiomas) que governam as manipulações da relação de igualdade. Vimos que a prova utilizava também o postulado das paralelas. Ela pressupõe então os principais princípios (postulados e axiomas) do livro I de Euclides.

O desdobramento de todas essas sutilezas lógicas pode parecer uma inutilidade. As equivalências em área que fazem o objeto das proposições I-35 e I-41 são triviais se recordarmos as fórmulas de cálculo que aprendemos na escola: 1) A superfície de um paralelogramo é o produto de sua

base por sua altura. 2) A superfície de um triângulo é a metade desse produto.

Concordo, mas como justificar essas fórmulas? Para a segunda, é fácil: basta mostrar que um triângulo é a metade de um paralelogramo de mesmas base e altura. Ora, é o que Euclides demonstra na segunda parte de I-34. Quanto à primeira igualdade, ela é “evidente” para um retângulo; basta então entendê-la no caso de quaisquer paralelogramos. De qualquer modo, é o que está estabelecido em I-35 e I-36, uma vez que essas proposições permitem afirmar que todo paralelogramo é igual a um retângulo de mesmas base e altura. Portanto, pode-se ler essa passagem dos *Elementos* como uma fundação teórica dos procedimentos do cálculo das áreas planas mais elementares, paralelogramos e triângulos.

A tabuleta cuneiforme Plimpton 322 (segundo milênio antes de nossa era) comporta três colunas de números em notação sexagesimal e uma numeração das entradas de 1 a 15. Os números recontados são da forma $[(b/a)^2, b, c]$ onde (a, b, c) são inteiros verificando a igualdade $a^2 + b^2 = c^2$. Por que razão se teria realizado tal tabela? Ela implica um conhecimento do teorema da hipotenusa (isto é, uma interpretação geométrica)? Uma coisa é certa: as técnicas matemáticas dos sábios babilônios, muito antes das dos gregos, não eram relegadas a simples aplicações práticas. (BV)

Construir e comparar

Para os platônicos, a geometria do espaço culmina com o estudo dos cinco poliedros regulares, aos quais Euclides dedica o último livro dos seus Elementos

Não sabemos nada a respeito dos anos de formação de Euclides, e há fortes razões para crer que o mesmo se pode dizer de seus comentaristas da Antiguidade tardia. Mas, Proclo de Constantinopla (morto em 485) não hesita em afirmar, ao redigir seu comentário ao livro primeiro dos *Elementos*, que Euclides era platônico. A obra termina com a construção de figuras “platônicas”, e isso lhe basta.

Devemos reconhecer que Proclo tem razão em um ponto: há certamente uma ligação entre Platão e Euclides, mais precisamente entre a cosmologia platônica e o final do livro XIII dos *Elementos*. Em seu diálogo *Timeu*, composto entre os anos 360 e 355 a.C., Platão descreve o demiurgo que construiu o corpo do mundo. A cada um dos quatro elementos fundamentais que compõem o mundo (fogo, ar, água e terra), o demiurgo associou um sólido regular: tetraedro para o fogo, octaedro para o ar, icosaedro para a água e cubo para a terra. Platão acrescenta que o demiurgo utilizou uma quinta figura para “representar o Universo em seu conjunto”. Trata-se

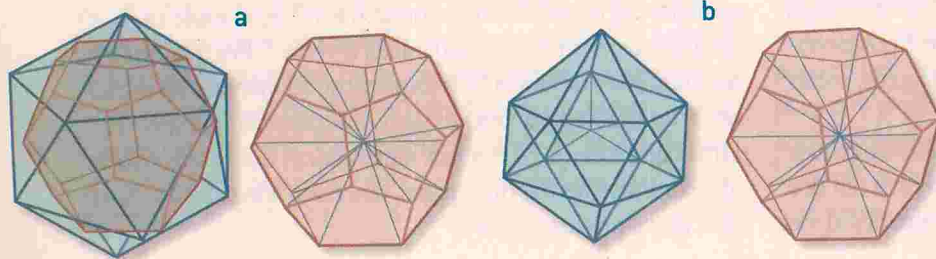
do dodecaedro, que Platão não nomeia. Em suas proposições XIII-13 a XIII-17, Euclides constrói (e circunscreve com uma esfera) todos esses sólidos. Na última proposição do tratado (XIII-18), compara o comprimento das arestas das cinco figuras. Eis a ligação entre os dois. A denominação tradicional de “figuras platônicas”, que os cinco poliedros receberam, deve-se à grande fama que obtiveram Platão e seu *Timeu*.

Contudo, a dedução feita por Proclo a respeito da filiação filosófica de Euclides é incerta por dois motivos. O primeiro é que independentemente de quaisquer conotações filosóficas, os cinco sólidos regulares possuem um interesse evidente para todos os geômetras. Como o próprio Proclo afirma, esses poliedros exibem uma propriedade notável: ao passo que é possível inscrever, dentro de uma circunferência, uma infinidade de polígonos equiângulos e equiláteros, não existem senão cinco sólidos regulares inscritíveis em uma esfera.

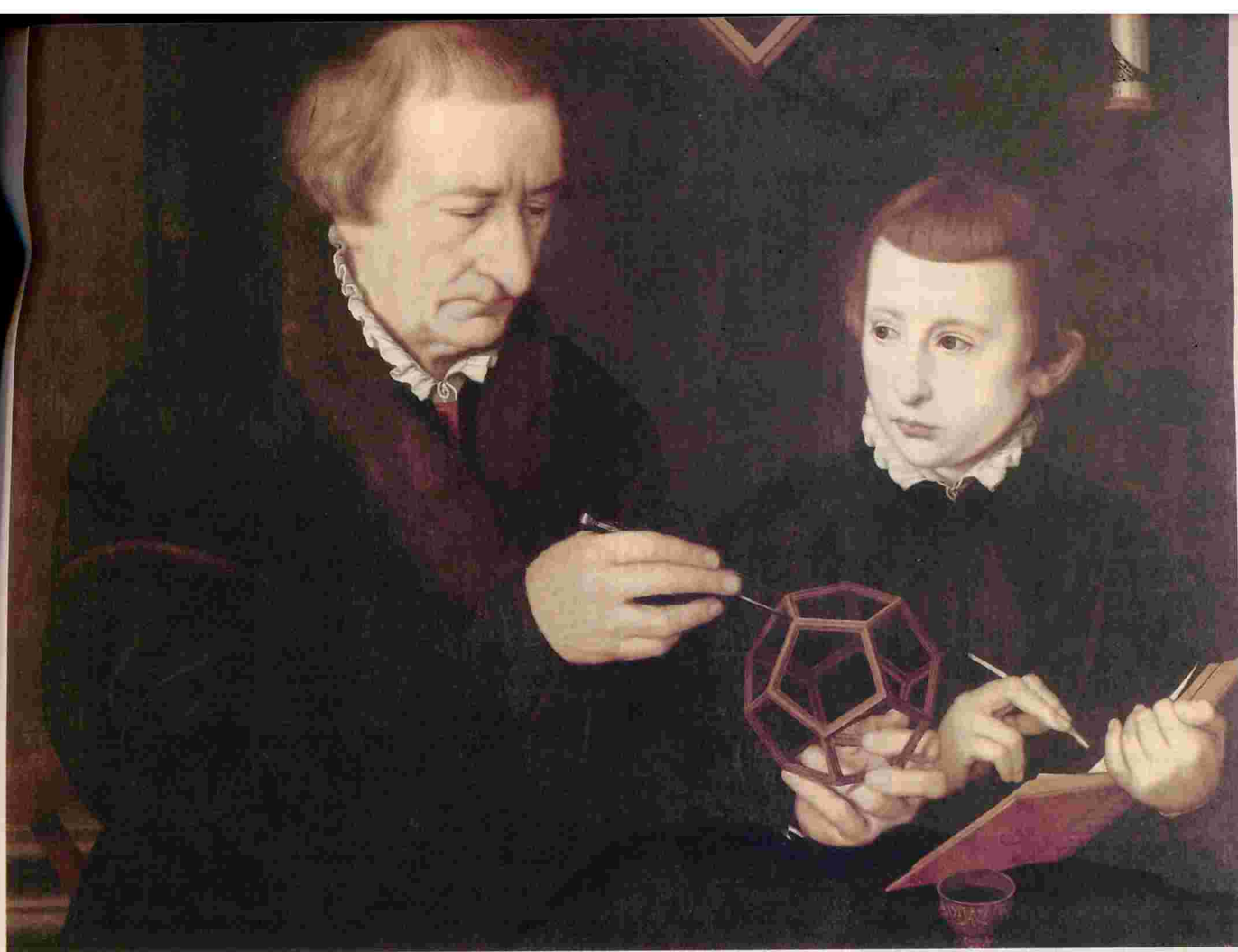
Ela, ao contrário da circunferência, não se deixa dividir de infinitas maneiras em porções iguais, mas somente de cinco maneiras. No entanto, a esfera é o análogo tridimensional da circunferência.

O segundo é que Proclo já havia mencionado os poliedros regulares ao descrever a genealogia dos *Elementos*. Ele afirmou: “Pitágoras transformou o estudo da geometria em um esquema de educação liberal; (...) foi ele quem descobriu o estudo dos irracionais e a construção das figuras cósmicas [os cinco sólidos regulares]”. Mas se Pitágoras havia descoberto a construção dos cinco sólidos regulares, Euclides não seria platônico, mas pitagórico.

De fato, a afirmação relativa a Pitágoras, que Proclo reproduz de Iâmblico, pertence à tradição dos pais fundadores. Seu objetivo é duplo: a atribuição de um “esquema de educação liberal” a Pitágoras visa associá-lo à formulação do sistema quadripartito de descrição das ciências ma-



a) Dodecaedro inscrito em um icosaedro, e vice-versa. b) A relação entre a superfície dos dois inscritos em uma mesma esfera é a mesma que entre seus volumes. Para mostrar isso, decomponhamos cada um dos sólidos em pirâmides (20 para o icosaedro, 12 para o dodecaedro). O volume de uma pirâmide é $Ah/3$, h é a altura e A , a área da base. A mesma circunferência circunscreve as faces do icosaedro e do dodecaedro; portanto, as pirâmides dos dois sólidos possuem a mesma altura h . Assim, o volume do icosaedro é $V_{20} = A_{20}h/3 \times 20$, e o do dodecaedro é $V_{12} = A_{12}h/3 \times 12$, em que A_i a área de uma face do sólido com i faces, é igual à superfície total do sólido $[S_i]$ dividida por i . Assim, as razões S_{12}/S_{20} e V_{12}/V_{20} são iguais.



QUADRO JOHANNES NEUDÖRFER e seu filho (1561), de Nicolas Neufchatel, mostra o matemático dando uma aula sobre os poliedros regulares. Em sua mão esquerda, um dodecaedro

temáticas (o “quadrivium”), elaborado no começo do século IV a.C.; e as supostas contribuições de Pitágoras ao estudo dos irracionais e dos poliedros regulares são introduzidas para sugerir que grande parte dos *Elementos*, especialmente os resultados presentes nos livros X e XIII, já haviam sido esboçadas pelo filósofo.

Pitágoras ou Teeteto?

Deve-se procurar a motivação para esse tipo de fabulação não mais na história da geometria, mas da filosofia. Diversos autores da Antiguidade tardia tentaram mostrar que Platão seria, na verdade, um (fiel) discípulo de Pitágoras. Já na época helenística, alguns autores, menos generosos, afirmavam que o mestre da Academia era um plagiário, e que havia baseado seu célebre *Timeu* na obra intitulada *De la nature*, do pitagórico Filolau. Essas extravagantes afirmações apoiavam-se em um fato: o personagem principal do diálogo escrito por

Platão é um certo Timeu de Locres, apresentado como sábio da Magna Grécia. Nada sabemos a respeito dele, nem mesmo se se trata de um pitagórico do século V a.C. (a cena ocorreria em algum momento entre os anos de 430–420) ou de um simples personagem literário criado por Platão. Mas um bom número de autores antigos acreditou que a cosmologia platônica não passaria de uma retomada de antigas doutrinas pitagóricas. Um falsário da época helenística chegou mesmo a redigir um tratado, *Sobre a natureza do Cosmos e da alma*, atribuído a esse Timeu de Locres, e que era simplesmente um resumo do diálogo de Platão. Muitos, entre os quais Iâmblico, não perceberam a fraude.

Jamais saberemos ao certo o contexto das primeiras investigações sobre os sólidos geométricos. Alguns testemunhos, no entanto, ainda que somente um pouco mais confiáveis, indicam quem teria lançado o programa de estudo dos poliedros.

Trata-se de Teeteto de Atenas (morto em 369), amigo de Platão e discípulo de Teodoro. Costuma-se apresentá-lo como a primeira pessoa a escrever um tratado consagrado às cinco figuras sólidas regulares. Essa obra está perdida, mas foi sem dúvida uma das fontes matemáticas exploradas no *Timeu*, ainda que Teeteto não seja explicitamente citado nesse diálogo de Platão.

Alguns historiadores acreditam que o trabalho de Teeteto foi retomado também por Euclides, e que constitui a essência do livro XIII dos *Elementos*. Isso de fato é possível, embora seja difícil confirmar. Existem diferentes maneiras de tratar os poliedros. Mesmo se considerarmos somente o problema de sua construção, pode-se conceber no mínimo duas abordagens: 1. Constroem-se sucessivamente cada uma das cinco figuras, para depois mostrar como elas podem ser circunscritas por uma esfera. Esse é o procedimento do livro XIII. 2. Toma-se uma esfera e de-

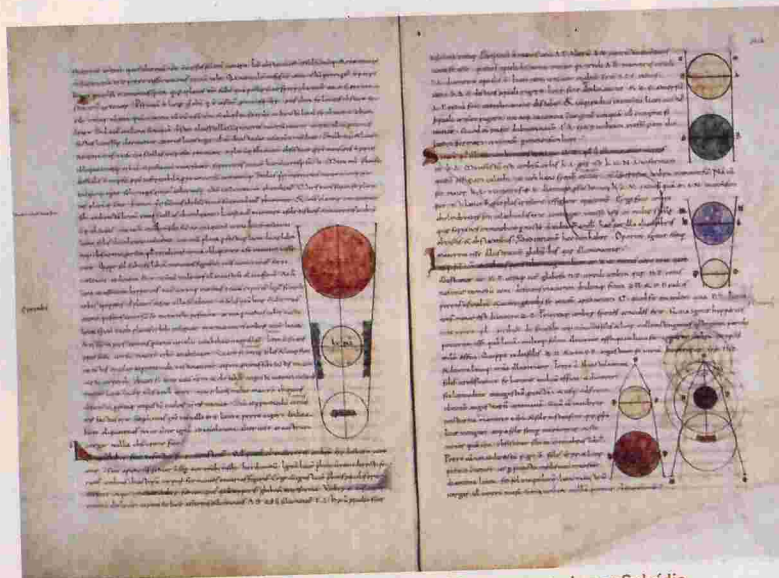
terminam-se, sobre sua superfície, os pontos que fornecem os vértices de cada poliedro. Tal é a via seguida por Pappus, no livro III de sua *Coleção matemática*.

Do ponto de vista técnico, as duas opções revelam-se bastante diferentes – basta comparar a construção dos mesmos poliedros por Euclides e Pappus. Mesmo se admitirmos, hipoteticamente, que Platão inspirou-se em Teeteto, não seria possível determinar a abordagem desse último. O autor do *Timeu* não dá nenhum detalhe relativo à construção dos sólidos. O diálogo mostra que Platão tinha uma idéia a respeito da noção de sólido regular, e sabia que existem somente cinco. Ele descreveu a constituição global desses sólidos (natureza e números de faces e de ângulos sólidos), como uma exposição cosmológica, não um manual de geometria.

Platão preferiu enfatizar o tratamento dessas figuras como elementos simples, a partir dos quais elaborou modelos geométricos. Platão acreditava que elas permitem explicar certas transformações físicas elementares (ver quadro na pág. 67).

A influência do *Timeu*, de seus comentadores, mas também de seus críticos, como Aristóteles, foi formidável, comparável à influência dos *Elementos*: foi utilizado como um dos textos fundamentais da escola neoplatônica, na Antiguidade tardia; na Idade Média, autores cristãos compararam sua cosmologia aos escritos do Gênesis, para contrapor Platão a Aristóteles e sua tese “abominável” da eternidade do mundo, contrária às Escrituras. Na Renascença, retoma-se a lição platônica: é necessário procurar regularidades matemáticas para explicar a ordem e a estrutura do mundo. Johannes Kepler, especificamente, concebeu em 1595 um modelo geo-

métrico do Universo a partir dos sólidos platônicos. Tamanho sucesso ajudou, sem dúvida, a manter constante o interesse pela teoria matemática dos sólidos regulares, para bem além do círculo de especialistas.



MANUSCRITO DE MEADOS do séc. X de *Timeu*, traduzido e comentado por Calcidio. Proclo, em seu comentário dos *Elementos*, associou Euclides à cultura platônica

Comparação dos Sólidos

Os geômetras não ficaram indiferentes a todo esse entusiasmo, e a teoria dos sólidos regulares tornou-se um clássico, a ponto de modificar o fim dos *Elementos*: Euclides terminou sua obra com a proposição XIII-18, que estabelece que a ordem decrescente das arestas dos cinco sólidos é a mesma ordem segundo a qual Euclides os construiu, nas proposições 13 a 17. Mas os estudiosos insistiram em acrescentar, até a Renascença, novos resultados.

Na verdade, a coisa é um pouco mais complicada, pois o texto de XIII-18 sofreu diversas alterações e interpolações. Uma delas, bem no final da demonstração, específica, de maneira um tanto quanto inapta, que, afora os cinco sólidos já estudados, não será possível construir nenhum outro poliedro delimitado por figuras planas equiláteras e equiângulas idênticas (os polígonos regulares). Para que seja assim, é necessário acrescentar uma condição suplementar – a exigência de que os sólidos possam ser inscritos em uma esfera –, ta-

citamente suposta pelo autor. Ainda que esse teorema de limitação fosse conhecido antes de Euclides, acredita-se que essa porção de texto não seja autêntica.

A segunda interpolação, indiscutivelmente apócrifa, pretende estabelecer a proporção entre os lados a_i das figuras mencionadas em XIII-18, ou seja, determinar sempre que possível as razões a_n / a_m , em que a_i designa a aresta do poliedro regular com i faces (supõe-se que todos os poliedros estejam inscritos em uma mesma esfera). Em notação moderna, eis o que enuncia o autor:

$$(a_4)^2 = 2(a_6)^2; (a_4)^2 = 4/3(a_8)^2; (a_8)^2 = 3/2(a_6)^2$$

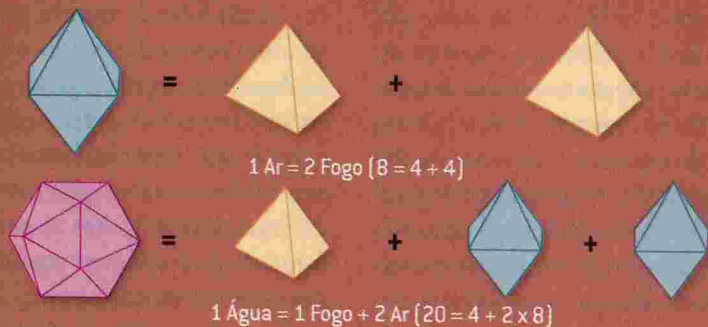
Para a_{20} e a_{12} , ele se contenta em lembrar que se trata de segmentos irra-

cionais no sentido euclidiano (fato esse demonstrado em XIII-16 e XIII-17): as proporções $(a_{20})^2/(a_{12})^2$, $(a_{20})^2/(a_4)^2$, $(a_{12})^2/(a_4)^2$, ... não podem ser escritas na forma de fração. As cinco figuras repartem-se em duas famílias: três sólidos “simples” (tetraedro, cubo e octaedro) e dois mais complexos, o icosaedro e o dodecaedro. Essa distinção, de resto, poderia ser percebida desde a construção das figuras. Por outro lado, a própria interpolação necessita ser complementada, mesmo se limitada apenas aos três poliedros “simples”.

Assim, pode-se deduzir, a partir da igualdade $(a_4)^2 = 4/3(a_8)^2$, que as áreas dos triângulos equiláteros que formam, respectivamente, as faces do tetraedro e do octaedro também se encontra em proporção de 3 para 4. Multiplicando-se pelo respectivo número de faces (4 e 8), obtém-se que as áreas do tetraedro e do octaedro (inscritos em uma mesma esfera) estão na proporção de 2 para 3. Então, por que não comparar os sólidos regulares por áreas e volumes, e não só pelas arestas?

Platão e os poliedros

Platão utiliza a associação entre elementos e poliedros regulares para explicar – por meio da decomposição e recomposição das figuras sólidas a partir de suas faces – as transformações mútuas de três dos quatro elementos (fogo, ar e água) observáveis no mundo físico. De fato, os correspondentes sólidos, por serem todos compostos de triângulos equiláteros, prestam-se particularmente bem a essas operações. O elemento terra, representado por um cubo, escapa às transmutações.



O caso do icosaedro e do dodecaedro, devido à aparição de proporções quadráticas irracionais, é ainda mais estimulante. Hipsiclo de Alexandria (século II a.C.) informa-nos que o matemático Aristeu chegou a compor um texto intitulado *Sobre a comparação das cinco figuras*, infelizmente perdido. Seu autor, sem dúvida, era um predecessor imediato ou um contemporâneo de Euclides, portanto posterior a Teeteto. A única informação precisa diz que seu estudo continha o seguinte belo resultado: “Uma mesma circunferência circuncreve o pentágono do dodecaedro e o triângulo do icosaedro, que estejam inscritos em uma mesma esfera”. Por decomposição em tetraedros, deduz-se daí que a relação entre as superfícies do dodecaedro e do icosaedro é igual à relação entre seus volumes (ver figura na pág. 64).

Hipsiclo observa que Apolônio de Perga, autor das *Cônicas*, havia demonstrado esse resultado em um tratado dedicado à comparação dos dois sólidos complexos. Deve-se a ele a determinação da relação em termos de segmentos de reta: a proporção entre a área (ou volume) do dodecaedro e do icosaedro é igual à proporção entre a aresta do cubo e a do icosaedro. Temos: $S_{12}/S_{20} = V_{12}/V_{20} = a_6/a_{20}$.

Hipsiclo, por sua vez, retomou a mesma comparação e propôs uma nova descrição, em termos de divisão em razão média e extrema (ver quadro na pág. 68). No início, seu tratado aparecia de maneira independente. Depois, em alguns manuscritos gregos, foi copiado na sequência dos *Elementos*, e tornou-se aquilo que se costuma chamar de livro XIV.

A história do final dos *Elementos* não termina por aí. Com efeito, existem outras maneiras de tornar evidente o fato de que os cinco sólidos regulares constituem uma família. Por exemplo, o número de vértices do icosaedro é igual ao número de faces do dodecaedro, e inversamente. Como cada um desses poliedros possui faces iguais, o centro dessas faces é equidistante do centro da esfera que os circunscribe. Portanto, eles ficam situados sobre a superfície da esfera inscrita dentro de cada poliedro, a qual dividem em porções iguais. Ou seja: se ligarmos os centros das faces de um icosaedro, obtemos um dodecaedro inscrito; se ligarmos os centros das faces de um dodecaedro, obtemos um icosaedro inscrito (ver figura na pág. 64). Tais poliedros apresentam uma relação de dualida-

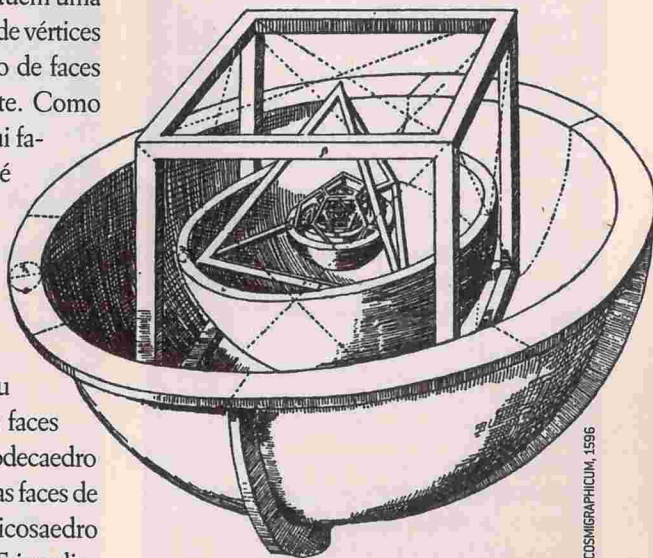
de. O mesmo acontece com o cubo e o octaedro. Já o tetraedro é seu próprio dual.

Sem usar o nome “dual”, os antigos interessaram-se por essas relações de inscrição e circunscrição entre os sólidos regulares. Alguns exemplos podem ser encontrados na primeira parte de um tratado composto na Antiguidade tardia, em meio a considerações a respeito dos poliedros e seus ângulos sólidos. Esse texto, anônimo, tornou-se o livro XV dos *Elementos*. É possível seguir essa história para além da Antiguidade. Autores árabes e depois os da Renascença acrescentaram resultados fascinantes a respeito dessas figuras ao final de suas próprias versões de *Elementos*.

Oposições e Regularidade

Em diversas ocasiões, os gregos privilegiaram o raciocínio por oposições. Aristóteles já indicava uma tabela de opostos, na qual dez pares aparecem, tais como limitado/ilimitado, ímpar/par, um/múltiplo, luz/escurecimento. Mais tarde, outras listas incluíram oposições como igual/desigual, exprimível/inexprimível, semelhante/diferente, ordenado/desordenado etc.

Em cada par, um dos termos é “bom”, o outro é “ruim”, e há exemplos matemáticos para vários deles. Mas que dizer a respeito da regularidade? De maneira ingênua, pode-se pensar que ela se opõe à



SISTEMA PLANETÁRIO de Johannes Kepler baseado nos cinco sólidos platônicos

Mysterium Cosmographicum, 1596

Divina proporção

No século II a.C., Hipsiclo enunciou uma proposição bastante complicada. Sua interpretação geométrica, contudo, é simples, uma vez que se compreenda a terminologia usada: "Uma reta [segmento de reta] qualquer, se está dividida em razão média e extrema, então a proporção da reta que pode produzir o quadrado da reta inteira, mais aquele do segmento maior relativamente à reta que pode produzir o quadrado da reta inteira, mais aquele sobre o segmento menor, é a mesma proporção da aresta do cubo relativamente à aresta do icosaedro".

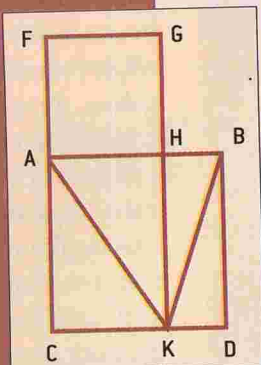
Dizer que uma reta AB está dividida em razão média e extrema pelo ponto H significa que a razão entre os segmentos AH e HB é igual à razão entre a reta inteira e o segmento maior, AB/AH . Assim, $AB \cdot HB = AH^2$, de maneira que o retângulo BDKH é igual ao quadrado AFGH.

Na Renascença, essa proporção recebeu o nome de "razão áurea". Considerava-se que ela possuía virtudes estéticas e metafísicas. Mais tarde, essa razão foi identificada a um número real (irracional), que recebeu o nome de "áureo" e que pode ser escrito como $(1 + \sqrt{5})/2$.

Dizer que uma reta D "pode produzir" a área A significa que o quadrado construído sobre D tem área A. Na figura, devido ao teorema da hipotenusa, temos: $AK^2 = AC^2 + CK^2$, em que $CK = AH$ é o segmento maior e $AC = AB$. Assim, AK é a reta que pode produzir o quadrado da reta inteira AB mais aquele do segmento maior AH.

De igual maneira, KB é a reta que pode produzir o quadrado da reta inteira AB mais aquele do segmento HB (pois $BK^2 = KH^2 + HB^2$ e $KH = AB$). Hipsiclo demonstrou que a razão entre a aresta do cubo e a aresta do icosaedro inscritos em uma mesma esfera é igual à razão AK/KB.

Essa proposição completava um dos resultados dos *Elementos* (XIII-17), segundo o qual, ao dividir a aresta de um cubo em razão média e extrema, o segmento maior é igual à aresta do dodecaedro inscrito na mesma esfera que o cubo. Na figura acima, a proporção entre a aresta do cubo e do dodecaedro inscritos na mesma esfera é igual à proporção AH/HB. A divisão em razão média e extrema aparece na construção do pentágono regular, e na construção dos dois sólidos regulares complexos, o icosaedro e o dodecaedro. Diversas proposições dos livros XIII e XIV são dedicadas a essa proporção.



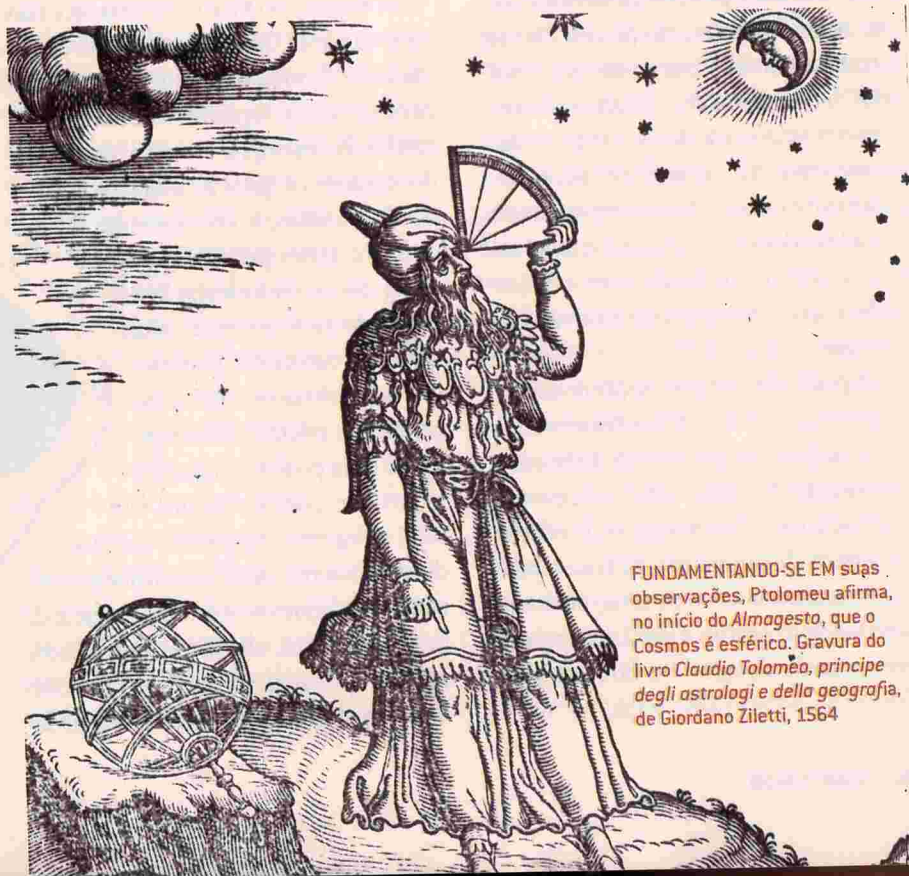
irregularidade. Será possível, no entanto, conferir status matemático a essa oposição, particularmente no que diz respeito às figuras geométricas? Qual e por quê? Duas ordens de consideração tiveram papel nessa discussão.

A primeira reside na descoberta de outra família, composta por 13 sólidos delimitados por faces equiláteras e equiângulas, mas não necessariamente todas do mesmo tipo (as faces que são de um mesmo tipo, porém, devem ser iguais). Isso significa que também esses sólidos são inscritíveis em uma esfera. O cuboctaedro, por exemplo, é composto por oito triângulos equiláteros e seis quadrados (ver figura na pág. 69). Atualmente, tais poliedros são classificados como "semi-regulares". Os raros estudiosos antigos que falam a seu respeito designam-nos simplesmente pelo nome de seu inventor: Arquimedes. Surge assim uma oposição entre duas famílias. De um lado, os 5 sólidos de Platão; do outro, os 13 de Arquimedes. Os primeiros foram explicitamente qualificados de "regulares" (a pa-

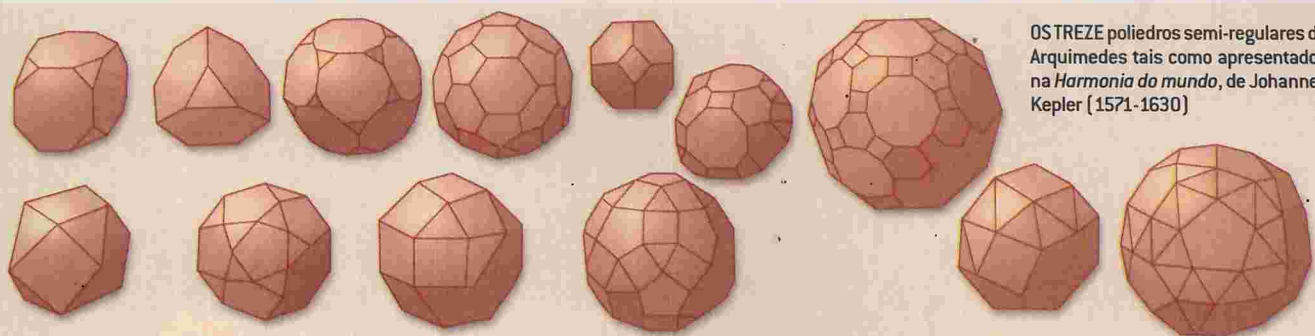
lavra utilizada pelos gregos, *tetagmena*, significa "ordenados") porque os de Arquimedes são não-homogêneos (suas faces, e portanto seus ângulos sólidos, não são idênticos). A descoberta de Arquimedes forçou os estudiosos da época a especificar exatamente o que caracterizava as cinco figuras platônicas, e a distinguir, senão os graus, ao menos o máximo da regularidade.

A outra fonte de interesse pelas figuras regulares nasceu dos trabalhos do geômetra Zenodoro. Sabemos que ele redigiu um tratado intitulado *Sobre as figuras isoperimétricas*, que continha (entre outras coisas) dois resultados bastante sugestivos: 1. Entre dois polígonos isoperimétricos (isto é, de igual perímetro) regulares, aquele que possui mais lados é maior (em área). 2. Entre dois polígonos isoperimétricos com o mesmo número de lados, se um é regular e o outro não, o regular possui a maior área. 3. Ele deduziu daí um terceiro resultado: entre todas as figuras planas com um mesmo perímetro, aquela que possui a maior superfície é o círculo.

O resultado 2 justifica o interesse pelas figuras regulares com base em critérios puramente matemáticos. O resultado 3 foi



FUNDAMENTANDO-SE EM suas observações, Ptolomeu afirma, no início do *Almagesto*, que o Cosmos é esférico. Gravura do livro *Claudio Tolomeo, principe degli astrologi e della geografia*, de Giordano Ziletti, 1564



OS TREZE poliedros semi-regulares de Arquimedes tais como apresentados na *Harmonia do mundo*, de Johannes Kepler (1571-1630)

estendido aos sólidos (figuras tridimensionais) por analogia, tanto por Zenodoro como por seus sucessores, gerando um quarto: entre todas as figuras sólidas com uma mesma superfície, aquela que possui o maior volume é a esfera.

Fundamentar de maneira rigorosa a propriedade maximal da esfera estava certamente fora do alcance dos antigos. De toda maneira, eles compararam o volume dos sólidos regulares entre si, e depois com o volume da esfera (considerando sempre figuras de mesma superfície). Pappus reuniu esses trabalhos na última parte do livro V de sua *Coleção*. A questão, provavelmente, já havia sido abordada nos tratados de Aristeu ou Zenodoro. A menos que

vejamos aí uma (outra) contribuição de Arquimedes. Seja como for, o resultado obtido para esses sólidos é o mesmo que para as figuras planas. Entre as figuras ditas platônicas com uma mesma superfície, a ordem crescente dos volumes é a mesma do número de faces: tetraedro, cubo, octaedro, dodecaedro e icosaedro. A partir daí, por extrapolação, conclui-se pela propriedade maximal da esfera.

Cosmos Perfeito

Uma razão em particular permitiu que conhecêssemos esses trabalhos em tantos detalhes. A partir do *Timeu* de Platão, e mesmo antes, atribuiu-se ao Cosmos uma forma esférica. Alguns argumentos apare-

ceram para justificar essa tese. Trata-se, essencialmente, de argumentos de conveniência: o Cosmos seria esférico porque essa é a forma que lhe convém. Por exemplo: "Ao Ser mais perfeito, o Cosmos, corresponde a figura mais perfeita, a esfera". No preâmbulo do *Almagesto*, obra que reuniu e codificou o conhecimento astronômico dos antigos, Cláudio Ptolomeu (século II d.C.) explicita os princípios cosmológicos que admite. Afirma então que o Cosmos, considerado em seu todo, é esférico. Para justificar essa hipótese, ele oferece diversas explicações astronômicas fundadas em observações e acrescenta certos argumentos de conveniência, entre os quais o "isoperimétrico": como a esfera, entre todos os sólidos com uma mesma superfície, é aquele que contém o maior volume, convém que seja essa a forma do Cosmos, que contém todas as coisas.

Com o objetivo de comentar essa observação de Ptolomeu, seus exegetas, principalmente Pappus e Teão de Alexandria, copiaram porções importantes de trabalhos a respeito das figuras que possuem um mesmo perímetro ou uma mesma área. Esse tema, por sua vez, contribuiu para a manutenção do interesse pelos poliedros. Os geômetras antigos sentiam-se reconfortados com a idéia de que era necessário privilegiar o estudo das figuras regulares (os sólidos platônicos e as principais figuras de revolução: esfera, cone, cilindro etc.). Eles se interessaram pouco pelos sólidos em geral, exceção feita à teoria das proporções, como no livro V dos *Elementos*. Porém, a generalidade era obtida pela abstração da noção de dimensão. (BV)

A última proposição de Euclides

A última proposição dos *Elementos* (XIII-18) estabelecia que a ordem decrescente das arestas dos sólidos regulares inscritos em uma mesma esfera é:

$$a_4 > a_6 > a_8 > a_{12} > a_{20}$$

em que a_n designa a aresta do poliedro regular com n faces. Eis as principais passagens da demonstração:

- AB (=AG) é o diâmetro da esfera, e C o seu centro. O ponto D de AB é tal que $AD = 2DB$.
- Une-se CG. H é a intersecção de CG com a esfera, e K a projeção de H sobre AB.
- O ponto L de AB é construído de tal maneira que $CL = CK$.

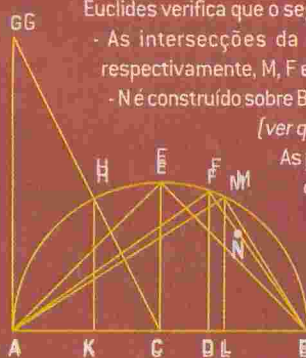
Euclides verifica que o segmento CL é maior que CD.

- As intersecções da esfera com as perpendiculares a AB em L, D e C são, respectivamente, M, F e E.

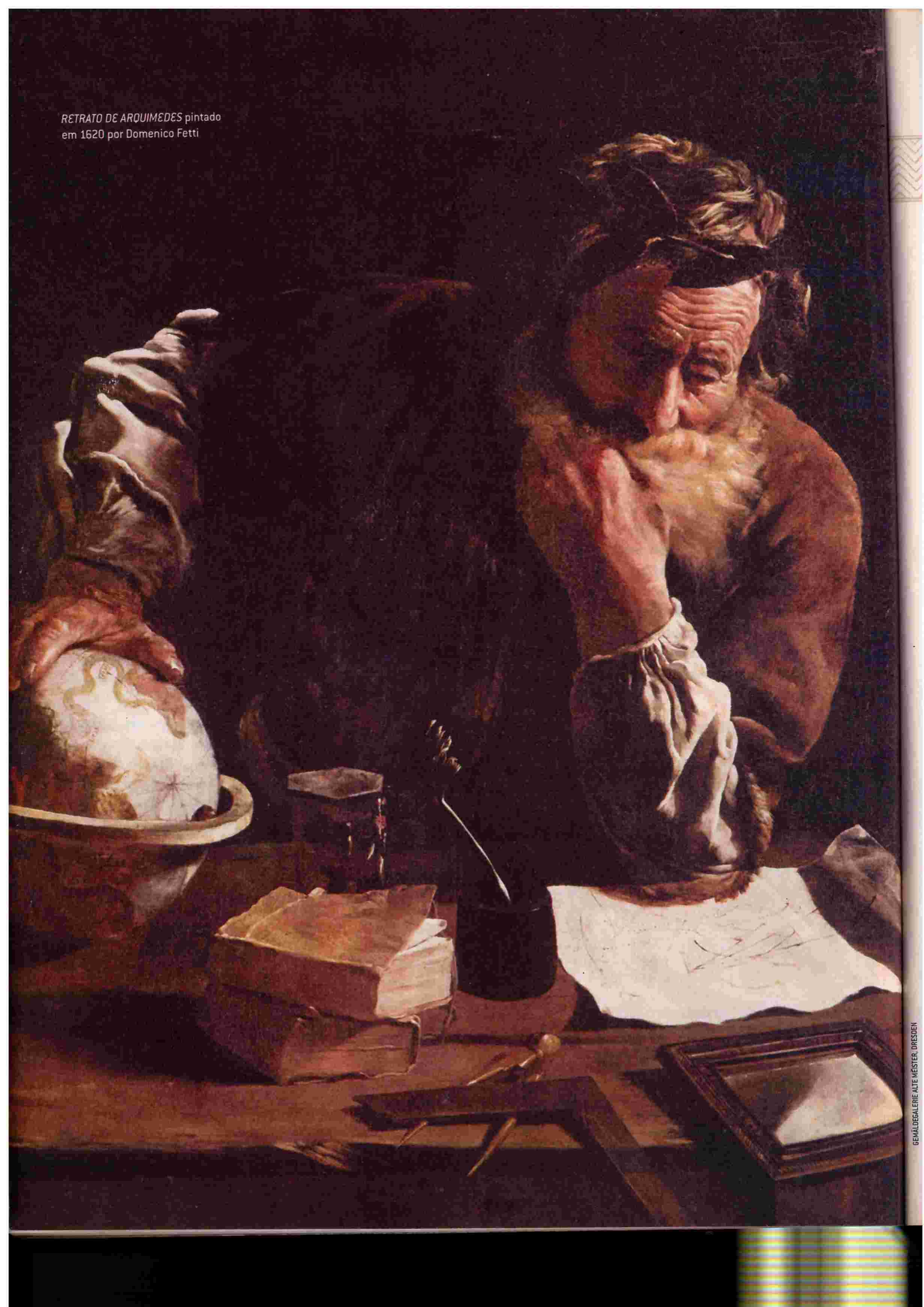
- N é construído sobre BF de tal maneira que BF seja dividida em razão média e extrema (ver quadro na pág. 68) por N, com BN como segmento maior.

As proposições XIII-13 a XIII-17 permitem afirmar que AF é a aresta do tetraedro (a_4), BF a aresta do cubo (a_6), BE a aresta do octaedro (a_8), BM a aresta do icosaedro (a_{20}) e BN a aresta do dodecaedro (a_{12}). Tem-se portanto que $a_4 > a_6 > a_8 > a_{20}$, e que $a_6 > a_{12}$.

O resto da demonstração consiste então em provar, com auxílio de relações métricas, a relação: $BM > BN$ ($a_{20} > a_{12}$).



RETRATO DE ARQUIMEDES pintado
em 1620 por Domenico Fetti



Arquímedes

As numerosas anedotas sobre ele valorizam o cientista e inventor, mas pouco falam do geômetra. Seus trabalhos nessa área, contudo, representam o primeiro passo na direção do cálculo integral

Em 264 a.C., sob um pretexto fútil, os romanos invadiram a Sicília e confrontaram os cartagineses, instalados na parte oeste da ilha. A guerra que se seguiu – a primeira púnica – durou mais de 20 anos, e terminou com a derrota de Cartago e o domínio romano sobre grande parte da Sicília. Do lado leste, porém, ao redor de Siracusa, o rei Hierão, que havia se aliado aos romanos, aproveitou as circunstâncias para fazer seu reino prosperar. Ele governou por 54 anos, até sua morte em 215, aos 92 anos.

Mas os cartagineses desejavam uma revanche e, em 218, Aníbal partiu da Espanha e cruzou os Alpes com seu exército. Começava a segunda guerra púnica, que terminaria em nova derrota de Cartago e marcaria o início da expansão romana para fora da península itálica. A Sicília, que ficava a meio caminho entre os dois adversários, permaneceu fiel a sua aliança com Roma até a morte de Hierão. Depois disso, a oposição fez um pacto com os cartagineses. Em 214, o cônsul romano Marcelo atacou Siracusa, com a expectativa de liquidar a questão em poucos dias. Porém, teve de recuar devido às máquinas e estratégias militares de Arquimedes. O cônsul sitiou a cidade, que tombou em 212; o geômetra, já idoso, morreu durante a pilhagem. Várias obras de arte foram transportadas a Roma. Costuma-se dizer que aí começou a admiração romana pela arte grega.

Essas circunstâncias dramáticas explicam a abundância de testemunhos acerca da morte de Arquimedes, transmitidos por dezenas de autores de todos os gêneros. Em pouco tempo, sua vida e caráter tornaram-se tema de anedotas fantásticas ou edificantes. Assim surgiu a lenda de que seria tão distraído que esquecia até de comer ou tomar banho. Absorto em uma demonstração, não teria percebido nem mesmo a queda de Siracusa.

Para alguns episódios, dispomos de várias versões divergentes: cada autor retém apenas aquilo que serve a seu propósito. Por exemplo, para o historiador Políbio – nascido uma década após os acontecimentos –, a narração do cerco de Siracusa serviu para ressaltar o papel decisivo desempenhado por indivíduos excepcionais, ao passo que o escritor e filósofo platônico Plutarco de Queroneia (46-120) interpretou-o como a oposição entre a alma (Arquimedes) e o corpo (os outros siracusanos). Já Cícero, orador e homem público, tentou isentar os romanos pela morte do sábio, e nada falou sobre a captura de Siracusa.

Ele preferiu evocar dois globos celestes construídos por Arquimedes (entre os quais um planetário móvel), e que despertaram grande admiração. Mesmo assim, mencionou-os apenas para observar que esses foram os únicos prêmios que Marcelo aceitou tomar de Siracusa, com o objetivo de consagrá-los ao templo da Virtude. O próprio Cícero, que serviu como questor (magistrado encarregado da gestão dos bens públicos) na Sicília, deu uma espécie de lição aos siracusanos: para servir à glória de Arquimedes, reencontrou seu túmulo, negligenciado pelos compatriotas.

Engenheiro ou Geômetra?

Arquimedes exercitou seus incomparáveis talentos em ao menos quatro especialidades matemáticas: geometria, astronomia, mecânica e óptica. Contudo, se o siracusano avulta incontestemente na Antiguidade como o mais célebre dos sábios, é menos como geômetra que como “engenheiro”. Poucos autores, uma dezena no máximo, e quase todos matemáticos, referem-se a seus trabalhos teóricos, principalmente em geometria. Se ele merece, aos olhos de quase todos, eterna admiração, é por causa das máquinas cuja invenção e/ou fabricação costuma ser-lhe atribuí-



ARQUIMEDES É MORTO por soldado romano, em cópia de um mosaico feito pela escola de Rafael, no século XVI

da, às vezes de maneira pouco rigorosa: máquinas de guerra (como catapulta, guindaste e espelhos ardentes), o parafuso helicoidal, sistemas de polias compostas, a balança dita "romana", o elevador hidráulico, o planetário.

Esse retrato de inventor genial e fecundo não agrada a todo mundo. O biógrafo Plutarco de Queroneia dedica uma de suas *Vidas paralelas* a Marcelo, o conquistador de Siracusa. Na obra, pinta um quadro totalmente diferente, de um Arquimedes puramente geômetra, que manifesta desdém pelas realizações técnicas e materiais. A narração de Plutarco é brilhante e sedutora. Por ser a mais completa, embora não a mais precisa, costuma também ser a mais citada. Esquecem-se, porém, os objetivos que seu autor perseguia: exaltar a matemáti-

ca "pura" e desvalorizar a técnica e os técnicos. Contudo, Plutarco não podia ignorar a história tradicional, especialmente a utilização das máquinas de guerra que tanto haviam impressionado seus antecessores. A maneira como ele explica a presença de numerosas máquinas de guerra em Siracusa merece atenção. Ele afirma que, para Arquimedes, isso não passava de uma brincadeira de geômetra, resultado de uma ordem do rei Hierão que lhe pedia para vulgarizar sua ciência em benefício do povo. Plutarco fez então uma digressão a respeito da origem da mecânica na época de Arquitas e de Platão. Ele confundiu, ou quis confundir, as soluções por meio de curvas geométricas com instrumentais aproximadas.

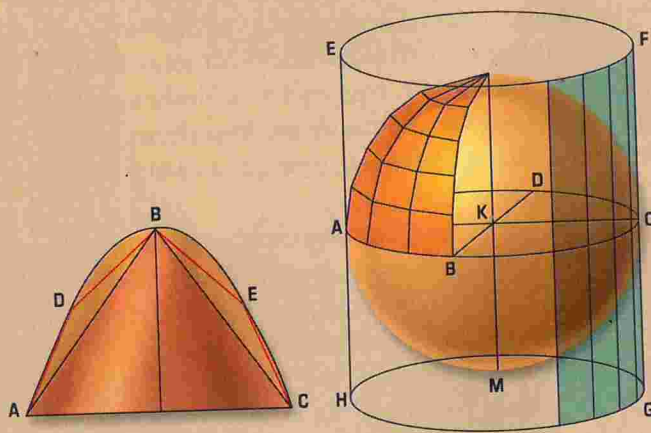
Ao retomar o fio de sua narrativa, Plutarco informa que Arquimedes, certa vez, escreveu ao rei, seu parente e amigo. Na carta, ele disse: "Dê-me um lugar para me firmar e um ponto de apoio para minha alavanca, que eu deslocarei a Terra". Ele supunha que uma dada força poderia mover não importa qual peso, por maior que fosse. Era uma maneira, um tanto quanto hiperbólica, de contrariar a *Física* de Aristóteles, em particular a afirmação de que, a partir de certo limite, as forças mecânicas não têm mais efeito.

Maravilhado, o rei teria pedido a Arquimedes que fizesse uma demonstração de seu princípio. Plutarco aproveita para emendar outra história famosa: a do levantamento do navio. Nessa versão, um imenso navio foi colocado em terra com grande esforço de uma numerosa mão-de-obra. Depois, foi carregado com homens e mercadorias. Arquimedes, porém, graças a um sistema com diversas polias que multiplicava sua força, sentado e com um gesto tranquilo de mão, teria conseguido sem esforço puxar o navio, que deslizou sem solavancos até o lugar onde estava. Tamanho êxito teria deixado Hierão boquiaberto, a ponto de pedir ao amigo para construir máquinas de guerra.

Dois famosos resultados em geometria

1) O volume do cilindro circunscrito à esfera S é igual a uma vez e meia o de S , e a superfície lateral é igual à de S , ou seja, quatro vezes a superfície de um grande círculo (por exemplo, $ABCD$) da esfera. Essa propriedade seria usada em cartografia para projetar a esfera sobre um plano, depois de haver cortado o cilindro ao longo de uma geratriz como EH . 2) A área sob o segmento de parábola $ADBEC$ (superfície compreendida entre a reta AC e a parábola) é igual a quatro terços do triângulo ABC . Dessa propriedade deduz-se a quadratura da parábola (ver artigo na pág. 36).

Arquimedes demonstrou esses dois teoremas pela utilização do método por exaustão: no caso da parábola, o método foi aplicado pela divisão de cada segmento de parábola em dois, depois em mais dois etc. No caso do cilindro e da esfera, Arquimedes aproximou o cilindro com auxílio de prismas com um número cada vez maior de faces, e a esfera de maneira semelhante. A demonstração demandava 32 proposições introdutórias e ocupava cerca de 60 páginas do tratado *A esfera e o cilindro*.





CÍCERO DESCOBRE a tumba de Arquimedes, pintura de Martin Knoller, de 1775

A narrativa não pode ser aceita sem algumas reservas. Para todas essas anedotas, há versões divergentes e é impossível saber qual detalhe corresponde ou não à realidade. Ateneu e Proclo, por exemplo, contam de outro modo a história do navio: Hierão teria mania de grandeza e mandou construir o maior navio da Antiguidade, que ele desejava enviar ao rei Ptolomeu, com uma carga de 2 mil toneladas. Todos os siracusanos reunidos não conseguiram colocar o navio na água. Mas com um mecanismo, Arquimedes teria permitido a Hierão, sozinho, movê-lo até o porto. Na viagem inaugural, Hierão ofereceu seu navio a Ptolomeu: Alexandria era o único porto capaz de abrigá-lo.

Ateneu descreve o mecanismo como um “parafuso sem fim”, inventado por Arquimedes e movido por “poucas pessoas”. Plutarco coloca Arquimedes como parente do rei, enquanto outros ressaltam sua condição modesta. Ele afirma ainda que Arquimedes nada escreveu sobre suas máquinas e invenções, mas aí também contradiz outras fontes, entre as quais Vitrúvio e Pappus. De qualquer modo, parece bastante provável que Arquimedes tenha solicitado o patronato do rei, do mesmo modo como mais tarde fariam os inventores da Renascença. Esse fato não é nada compatível com o suposto desdém pelas técnicas.

O retrato esboçado por Plutarco está de acordo com sua posição no debate que se desenvolveu, na época imperial (séculos I e II), a respeito do status da mecânica: para ele, era uma degra-

dação da geometria. Ao ressaltar o desdém de Arquimedes pelas técnicas e a qualidade incomparável de seus escritos teóricos, Plutarco alinha-o em seu campo.

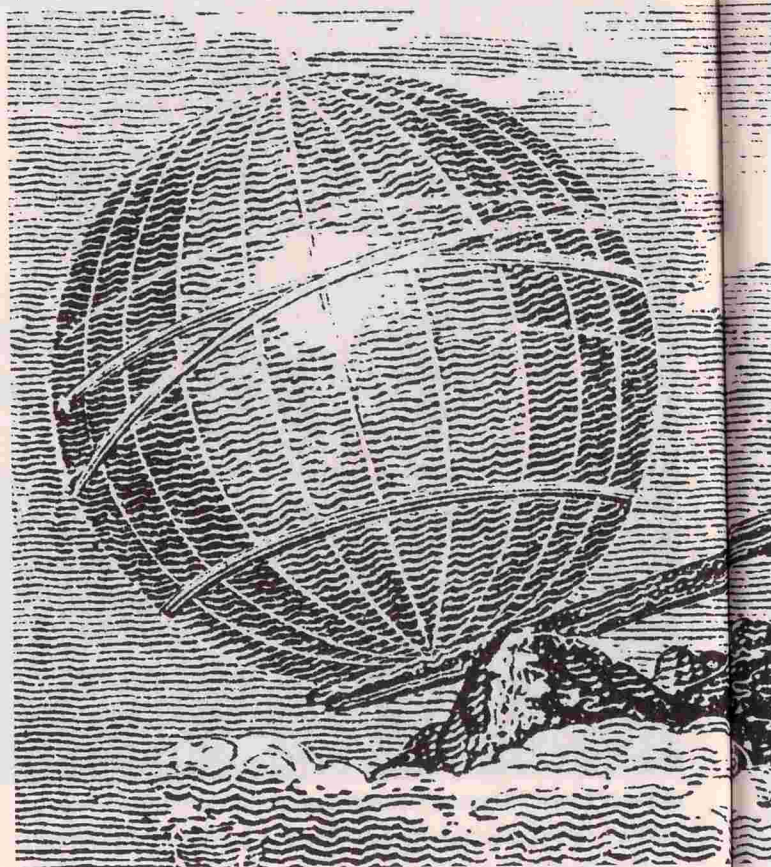
É surpreendente que os modernos tenham aceito, com tamanha confiança, as afirmações do filósofo de Queroneia a respeito de um dos sábios mais completos de seu tempo, inventor e geômetra. Reconstituir sua biografia a partir dessas anedotas é uma tarefa ilusória. Apenas uma coisa parece certa: tais histórias devem ser entendidas como exercícios de “vulgarização” científica dos trabalhos feitos em mecânica pelo siracusano. Contar que Arquimedes pretendia erguer a Terra, ou que construía máquinas que permitiam o deslocamento de um navio por uma só pessoa, serve para ilustrar a universalidade teórica do princípio da alavanca ou a possibilidade de multiplicação da força com o auxílio de engrenagens. A anedota da coroa de ouro, com seu final singular em que Arquimedes interrompe um banho e sai nu pela cidade, aos gritos de “Eureka” (“eu achei”), relembra seus trabalhos em hidrostática, e a descoberta do famoso princípio que ainda hoje leva seu nome (*ver quadro na pág. 75*). A lenda tardia a respeito dos espelhos ardentes, que lhe teriam permitido incendiar a frota de Marcelo, refere-se a suas pesquisas em óptica. Dositeu de Pelusa, correspondente de Arquimedes, havia tentado construir tal espelho, que, colocado sob o Sol, refletisse os raios para um ponto de convergência (ou seja, um espelho parabólico). Essa característica permitiria que ele fosse usado para queimar objetos

distantes. A tradição, certa ou errada, não hesitou em atribuir realizações do mesmo gênero ao siracusano, por conta de seu gênio, sem se preocupar com a verossimilhança.

Arquimedes em Alexandria?

Plutarco não detém o monopólio das afirmações contestáveis ou parciais. Diodoro da Sicília, historiador do século I a.C., menciona por duas vezes certa máquina composta por uma espécie de hélice inserida em um cano cilíndrico, destinada a bombear água. Segundo ele, elas eram usadas no Egito para irrigar as partes do delta do Nilo que as inundações do rio não alcançavam e em minas da Espanha, para esgotar a água do subterrâneo. De acordo com Diodoro, sua força é tamanha que seria possível retirar um rio inteiro das profundezas da Terra até a superfície e que tal máquina teria sido inventada por Arquimedes. Outros autores, como o cientista Filo de Bizâncio, o arquiteto Vitruvius, apaixonado pela história das técnicas, e o geógrafo Estrabão, também mencionaram ou descreveram esse aparelho, mas nenhum atribui sua invenção a Arquimedes. Para Diodoro, tratava-se de associar dois elementos, o nome da máquina e o do siracusano. Ele acrescenta, então, que a invenção de Arquimedes teria ocorrido por ocasião de uma viagem ao Egito.

Esse é o único testemunho que existe a respeito da suposta viagem. Contudo, os autores modernos, de maneira geral, aceita-



SEGUNDO PLUTARCO, Arquimedes teria dito a Hierão, rei de Siracusa: "Dê-me um ponto de aq

Método por exaustão

Para compreender o método por exaustão, consideremos a primeira proposição da Medida do círculo, de Arquimedes (ver figura ao lado). Seja um círculo Q de centro K e raio AK , um triângulo retângulo EFG tal que $EF = AK$ e tal que o lado EG seja igual à circunferência do círculo. Desejamos mostrar que a área do círculo é igual à do triângulo EFG .

Suponhamos que o círculo seja maior que EFG , e chamemos de D a diferença entre a área de Q e EFG . Seja $ABCD$ um quadrado inscrito no círculo. A diferença entre o círculo e o quadrado é constituída por quatro segmentos de círculo iguais. Dividamos o arco AB em duas partes iguais no ponto H , e tracemos os segmentos AH e HB . Se fizermos o mesmo nos outros segmentos de círculo, iremos obter um octógono inscrito.

Como o triângulo AHB é maior que a metade do segmento de círculo AHB , a diferença entre o círculo e o octógono, composta por oito pequenos segmentos de círculo, é menor que a metade da diferença entre o círculo e o quadrado. De acordo

com o princípio de continuidade (Euclides, X-1), se nós repetimos a mesma operação de dicotomia dos arcos, construiremos um polígono regular P , inscrito no círculo, tal que a diferença de área entre o círculo e P será tão pequena quanto se desejar. Suponhamos que nós a tornemos menor do que a diferença D . Teríamos então $Q - EFG > Q - P$, ou seja, $EFG < P$. Dessa forma, a área do polígono P estaria entre a área do triângulo EFG e a do círculo. Para simplificar, suponhamos que o polígono P seja o nosso octógono. Ele se decompõe em [oito] triângulos isósceles iguais, de mesma altura e cujas bases, adicionadas, constituem o perímetro do octógono. A sua área é portanto igual à área de um triângulo retângulo em que um dos lados do ângulo reto é igual à altura KL , e o outro ao perímetro do octógono (a área de um triângulo isósceles é o produto de sua altura pela meia base).

Finalmente: a altura KL é menor do que o raio AK , e o perímetro do octógono (ou de qualquer outro polígono inscrito) é menor do que a circunferência do círculo. Dessa maneira,

o triângulo retângulo igual em área ao nosso octógono é menor do que EFG , pois cada um dos lados do ângulo reto do primeiro é menor que o lado correspondente do segundo. Assim, o octógono é menor do que EFG . Pela sua construção, porém, ele era maior. Chegamos assim a uma contradição. De modo semelhante, com auxílio de polígonos regulares circunscritos ao círculo, podemos demonstrar que a hipótese "o círculo é menor do que EFG " conduz a uma contradição. Conclui-se daí que o círculo é igual ao triângulo EFG .

Em termos modernos, o raciocínio é diferente. A fórmula $S = 1/2(P \cdot h)$ vale para todos os polígonos inscritos em um círculo, em que S designa superfície, P o perímetro e h a altura. Se aumentarmos indefinidamente o número de lados, o polígono se aproxima do círculo e, no limite, seu perímetro coincidirá com a circunferência do círculo, e sua altura com o raio do círculo. Segue daí o resultado desejado. O método de Eudoxo-Arquimedes não recorre a essa passagem ao limite. Não se "exaure" o



...onto o apoio para minha alavanca e eu deslocarei a Terra"

Eureka, eureka!

"Uma questão proposta pelo rei Hierão ocasionou as descobertas hidrostáticas de Arquimedes. O monarca havia enviado a um ourives certa quantidade de ouro para fazer uma coroa, mas o artesão, desonesto, ficou com parte do ouro, após tê-lo substituído pelo mesmo peso de prata. A fraude foi descoberta. Como o rei não desejava destruir uma obra que era extremamente bela, solicitou que Arquimedes descobrisse a quantidade de ouro subtraída. Ele meditou sobre o assunto e, segundo se conta, a solução do problema apareceu-lhe em meio a um banho, e ele saiu totalmente nu, aos gritos de Eureka! — eu achei — palavra que se tornou célebre desde então."

Montucla, *História das matemáticas*, 1758.

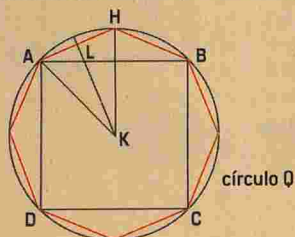
Por imersão, Arquimedes conhecia o volume da coroa (igual ao volume de água deslocado). Ele o comparou ao volume da quantidade de ouro, e depois de prata, de mesmo peso. Por proporção, então, determinou o tamanho da falcatura.

ram-no e até o reforçaram: Arquimedes teria passado uma temporada em Alexandria para estudar. É possível mesmo especular se teria ou não encontrado Euclides. Procurou-se uma confirmação para a estada do siracusano no Egito em sua importante correspondência científica com três pessoas, cuja passagem pela capital dos Lágidas é certa: Cono de Samos, Dositeu de Pelusa e Eratóstenes de Cirene. Mas basta ler essas cartas para ver que Arquimedes não conhecia nem Dositeu nem Eratóstenes antes do início de suas relações epistolares. Ele se dirige aos dois por ter ouvido falar de seu interesse por assuntos matemáticos, e de

círculo por meio de polígonos. Utiliza-se o princípio de continuidade para construir um polígono intermediário, o qual permite derivar uma contradição de cada uma das sub-hipóteses que se deseja descartar. O nome "método por exaustão", portanto, é mal escolhido, mas indica a proximidade que os matemáticos do século XVII viram entre o procedimento dos antigos e suas investigações infinitesimais.

Axioma de Arquimedes

Para obter um tipo de desigualdade Arquimedes utiliza um lema comparável, segundo ele mesmo afirma, a um de Eudoxo. No



caso da esfera e do cilindro, ele o enuncia assim: "Entre as linhas desiguais, as superfícies desiguais e as figuras sólidas desiguais, o excedente pelo qual a maior supera a menor, acrescido de si mesmo, é capaz de ultrapassar qualquer grandeza dada, entre aquelas que com elas sejam comparáveis".

Nós ignoramos como Eudoxo formulou seu lema; nas provas por exaustão do livro XII dos *Elementos*, Euclides usa o seguinte resultado: "Dadas duas grandezas desiguais, se da maior é subtraída uma grandeza maior que sua metade, e depois, do resto, uma grandeza maior que sua metade, e se isso for sempre continuado, uma certa grandeza restará, que será menor do que a menor das grandezas iniciais". Tal resultado havia sido estabelecido

na proposição X-1, a partir da definição V-4: "Diz-se que duas grandezas estão em relação quando são capazes, sendo multiplicadas, de ultrapassar uma a outra".

Em termos modernos, esses três enunciados afirmam que grandezas geométricas de um mesmo tipo (linhas, superfícies, volumes) obedecem ao "axioma de Arquimedes": Quaisquer que sejam os elementos x e y desses conjuntos, existe um número inteiro n tal que nx é maior do que y . [Esse axioma é essencial para a obtenção dos resultados intermediários na demonstração acima. Para o método por exaustão, ele se torna essencial por garantir que a aproximação se torna tão pequena quanto desejado.]

