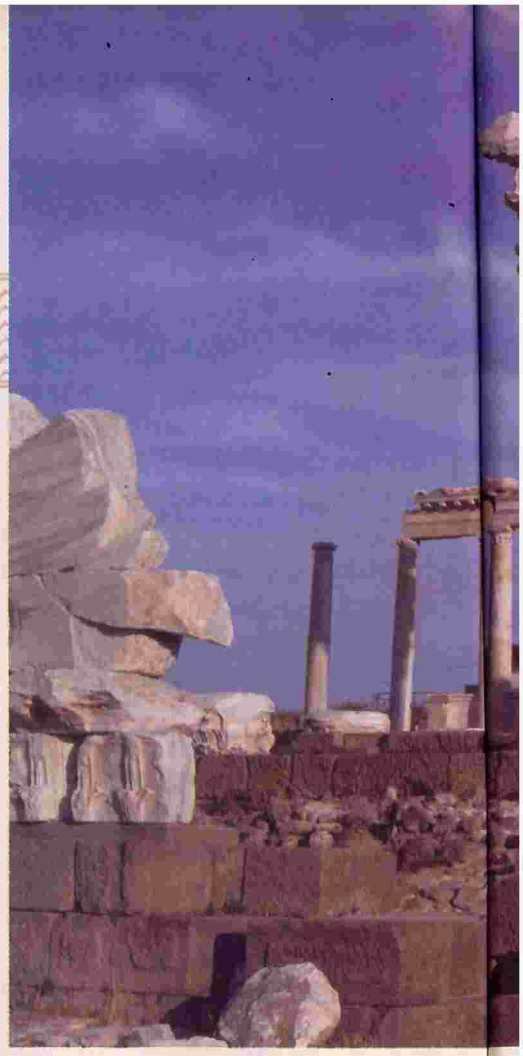
O romance das cônicas e contribuições de Apolônio



Nos primeiros anos do século II a.C., o geômetra redigiu uma imponente obra acerca das cônicas. Seu objetivo era apresentá-las da maneira mais geral possível

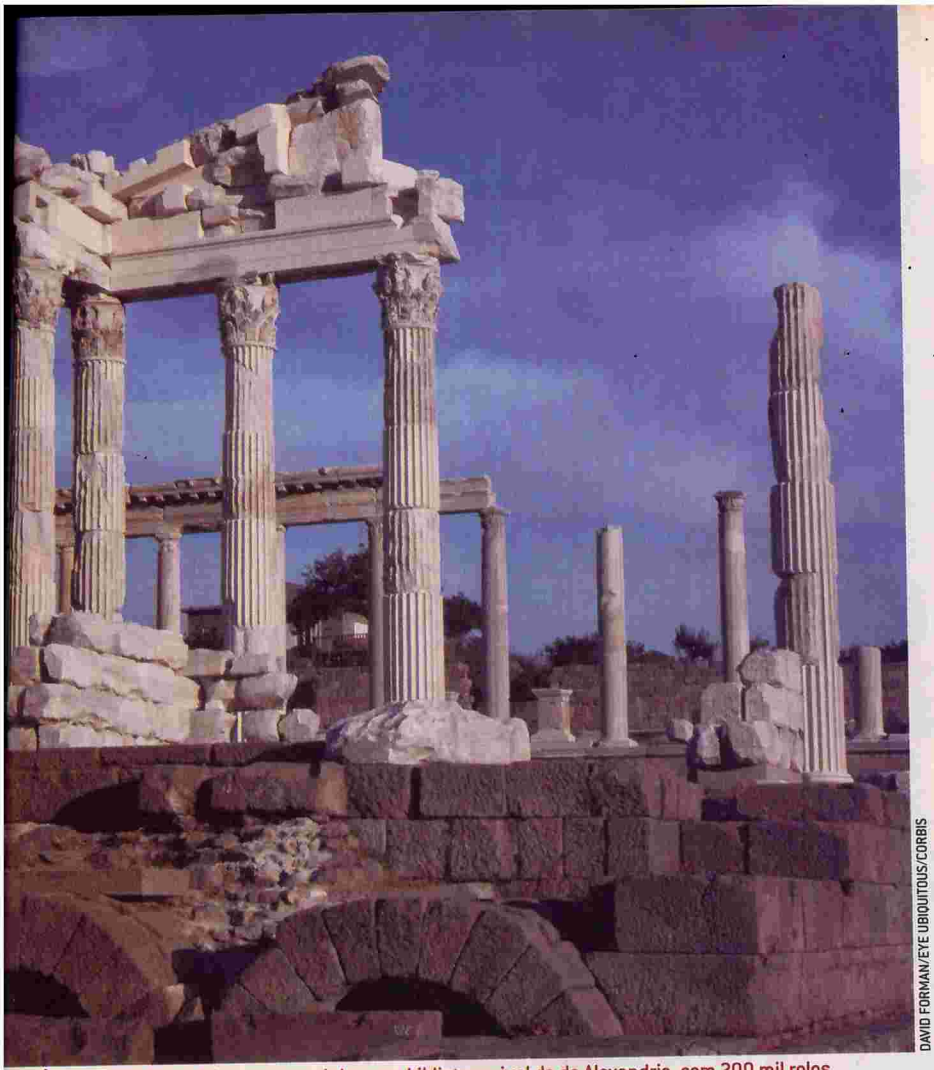
Na carta-dedicatória que acompanha seu comentário às *Cônicas* de Apolônio, Eutócio explica a seu correspondente Antêmio de Trales: "Meu querido amigo Antêmio, o geômetra Apolônio, natural de Perga, na Panfília, viveu no tempo de Ptolomeu Evergeta, conforme escreve Heracléio, o biógrafo de Arquimedes".

Quem é Heracléio e por que ele aproximou os nomes de Apolônio e Arquimedes? Essa associação não é benévola. Antêmio foi o arquiteto co-responsável, com Isidoro de Mileto, pela construção da catedral de Santa Sofia, em Constantinopla, em 532. Eutócio dirige-se a ele como a um amigo e discípulo mais jovem, e nós podemos situar a data da carta na passagem do século V para o VI. A identificação de Heracléio é um pouco mais problemática: Eutócio apresenta-o como autor de uma biografia de Arquimedes, mas em uma de suas obras anteriores – seu comentário à *Medida do círculo*, de Arquimedes – o mesmo Eutócio mencionou como autor da biografia um tal de Heráclido.

A situação é inquietante. É improvável que tenham existido dois biógrafos de Arquimedes com nomes tão parecidos. O siracusano é o único matemático grego não-filósofo ao qual havia sido consagrada uma biografia; não resta muita dúvida, portanto, de que Eutócio cita um mesmo autor. Os especialistas tendem a favor de Heráclido, pois o próprio Arquimedes cita, em carta-prefácio ao tratado *Das espirais* enviada a Dositeu, que havia recebido algumas demonstrações de Heráclido. Ele seria contemporâneo do siracusano, talvez conhecido pessoal. Pode-se imaginá-lo bem informado e digno de fé.

Eutócio fez então uma terrível acusação: "Ele (Heracléio) diz ter sido Arquimedes quem, em primeiro lugar, concebeu as proposições acerca das cônicas, mas que Apolônio, que não desejava sua publicação por Arquimedes, apropriou-se delas, o que, segundo minha opinião, não é verdade". Eis aí onde nosso historiador queria chegar, em uma acusação de plágio, uma disputa da paternidade sobre os resultados acerca das cônicas. Heracléio teria iniciado um incêndio que Eutócio se esforçaria para alastrar.

Em outra referência tirada de Heráclido, Eutócio afirmava que o objetivo de Arquimedes, em *A medida do círculo*, era fornecer uma aproximação "útil para as necessidades da vida cotidiana" para o número π (a razão 22/7). Mais à frente, Eutócio conta que Apolônio havia proposto uma aproximação mais precisa que a de Arquimedes, mas que seu



DAVID FORMAN/EYE UBIQUITOUS/CORBIS

RUÍNAS DA CIDADE de Pérgamo, que tinha uma biblioteca rival da de Alexandria, com 200 mil rolos. Apolônio viajou até lá para encontrar o geômetra Eudemo, a quem dedicou sua obra

objetivo não era satisfazer as necessidades da vida cotidiana. Essa dupla menção às "necessidades" aparece como uma cláusula defensiva, para justificar o valor arquimediano.

Esses dois exemplos mostram que Heráclido não tinha grande simpatia pelo autor das *Cônicas*. Ele mesmo sublinhou o espírito de emulação, e até de rivalidade, que existia entre Apolônio e os matemáticos contemporâneos ou anteriores, entre os quais Arquimedes.

No prefácio aos diferentes livros das *Cônicas*, Apolônio insiste na novidade e interesse de seus resultados, bem como na extensão e clareza de sua exposição. Ele afirma que sua obra é bem melhor que a de seus predecessores. De passagem, ainda critica Euclides. No prefácio do livro IV, Apolônio atesta uma disputa acirrada entre Cono de Samos – correspondente e amigo de Arquimedes – e um certo Nicoteles de Cirene. Em sua imparcialidade intransigente, ele acaba depreciando os dois: gratidão em relação a seus predecessores não é o sentimento que Apolônio costuma exprimir com prontidão.

Além de traços de personalidade, a "pressão" exercida sobre os geômetras na virada do século III para o século II a.C. explicaria esse estado de espírito. As instituições acadêmicas alexandrinas favoreciam a pesquisa e a competição, mas não facilitavam as relações humanas. O satirista Timon de Flionte assim descreveu os literatos e filólogos do museu: "Na populosa terra do Egito prosperam uns rabiscadores de livros que passam o tempo todo a dar bicadas uns nos outros na gaiola das musas".

Nesta selva de sábios, Apolônio, que realizava suas investigações depois de duas gerações de notáveis geômetras – Aristeu, Euclides, Cono, Dositeu, Arquimedes, Eratóstenes, Nicomedes, Dioclo –, precisava se destacar e ressaltar o interesse de seu trabalho.

Arquimedes não foi mencionado nenhuma vez nos dois tratados de Apolônio que se conservaram. No entanto, as obras abordam diversos temas estudados pelo siracusano. Além da aproximação do número π, Apolônio concebeu um sistema de notação para grandes números melhor do que o complexo método proposto por Arquimedes em seu *Arenário*. Os matemáticos posteriores preferiram o sistema de Apolônio. Da mesma maneira, seu tratado acerca das *Inclinações*, que pertence à coleção "do Lugar analisado" *(ver pág. 82)*, estabelece que algumas figuras, antes resolvidas por neusis, eram resolúveis "por régua e compasso". Para outras, mais complexas, Apolônio propunha soluções alternativas, por meio de seções cônicas. Esses avanços esclareceram a natureza de vários problemas e reduziram o interesse pelas pesquisas de Nicomedes acerca das concóides. Apolônio desenvolvia, assim, uma linha de trabalho que tornava obsoleta a de seus predecessores.

Que dizer a respeito do plágio? Para isentar Apolônio da acusação, Eutócio dá a palavra a três testemunhas: Arquimedes, o próprio Apolônio e o historiador Gêminus de Rodes. O primeiro não se refere, em diversas ocasiões, aos *Elementos de cônicas*, para utilizar, sem demonstração, diferentes propriedades dessas curvas? O próprio Apolônio não reconhece que os quatro primeiros livros das *Cônicas* são uma exposição melhorada daquilo que outros já haviam proposto? E ele não os designa como livros de *Elementos*?

Se Eutócio tem razão a respeito das intenções de Apolônio, as afirmações sobre Arquimedes são mais incertas, pois o siracusano remete o leitor, talvez, a um de seus próprios escritos. Nada nos obriga a crer que ele se refere a um autor anterior.

Coleção do Lugar analisado

O livro VII da *Coleção matemática*, de Pappus de Alexandria, é um guia destinado a facilitar a leitura de outra coleção de textos, dita "do Lugar analisado", composta por 12 tratados de quatro autores: Euclides, Apolônio, Aristeu e Eratóstenes (os escritos de Apolônio representam quase metade da coleção, 14 de 33).

Trata-se de uma coleção reunida em torno da resolução de problemas de lugares geométricos, particularmente pela via da análise: procedimento que supõe resolvido o problema proposto, explora suas propriedades e conseqüências e busca, depois, pela inversão das considerações, deduzir a solução a partir daquilo que era conhecido. Esse método, observa Pappus, dirige-se àqueles que dominam os *Elementos*. A primeira metade da coleção trata de problemas planos; a segunda, de sólidos.

Menos de um terço da coleção se conservou. Reconstituir os tratados perdidos era um dos passatempos favoritos dos geômetras dos séculos XVI a XIX. Eles se interessaram particularmente pelo livro VIII das *Cônicas* de Apolônio, pelos *Porismos* de Euclides e pelo tratado dos *Contatos* de Apolônio.

Pappus explica como é possível agrupar os problemas nesse último tratado (problemas de construção são interpretados como sendo de lugar geométrico): "Dados sucessivamente três elementos quaisquer, entre pontos, retas e círculos com certas posições, descrever um círculo que passe por todos os pontos ou tangencie cada uma das linhas dadas". O leitor pode verificar que essa descrição engloba vários problemas: três pontos, três retas, três círculos, dois pontos e uma reta.

O caso mais fácil é a construção do círculo que passa por três pontos dados; o mais difícil é a construção de um círculo que tangencia três círculos dados, freqüentemente chamado de "problema de Apolônio".

Elementos de Cônicas

Eutócio se impressionou também pelos comentários de Pappus (séc. IV): "Apolônio nos deixou oito livros acerca das cônicas; para isso, ele completou os quatro livros de *Cônicas* de Euclides e lhes acrescentou outros quatro. Aristeu, autor de cinco livros sobre *Os lugares sólidos*, escritos depois das *Cônicas* e ainda hoje disponíveis, chamou contudo, assim como os predecessores de Apolônio, uma das seções cônicas de 'seção de cone acutângula', outra de (...) 'retângula' e a outra ainda de (...) 'obtusângula'".

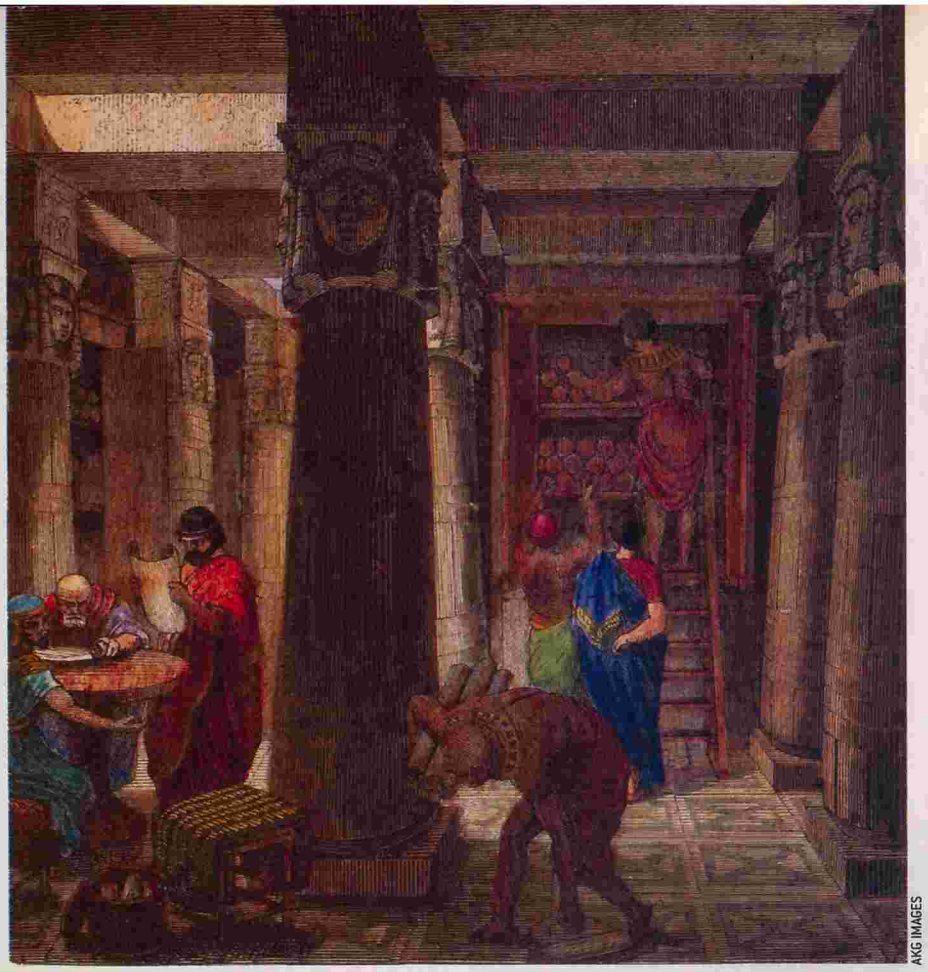
Esse texto é precioso pela referência que faz de Aristeu (fim do século IV a.C.?) e da designação das seções cônicas por ele utilizada, diferente da usada por Apolônio (elipse, parábola e hipérbole), que ainda hoje aprendemos.

Eutócio, que nesse ponto seguiu Pappus, considerava que os *Elementos de cônicas*, aos quais Arquimedes se referiu, eram uma obra de Euclides, autor por excelência dos *Elementos* para todos os sábios da Antigüidade tardia. Se Euclides trabalhou e escreveu a respeito das seções cônicas – o próprio Apolônio o reconheceu –, é menos provável que tenha redigido quatro livros de elementos sobre essa teoria, como afirma Pappus.

DETALHE DO FRONTISPÍCIO da edição das *Cônicas* de Edmund Halley (1710). De acordo com Vitrúvio, o filósofo Aristipo, discípulo de Sócrates, após encalhar na ilha de Rodes e perceber figuras geométricas traçadas na areia, reconfortou seus companheiros: "Nada precisamos temer, vejo traços humanos! Onde há geometria, o homem não está longe"

A coleção "do Lugar analisado" (reunida pelos geômetras da Antigüidade tardia) menciona um escrito de Euclides intitulado *Lugares de superfície*, em dois livros. Pela posição em que aparece na coleção – vem depois das *Cônicas* de Apolônio e dos *Lugares sólidos* de Aristeu –, a obra não se limitava aos problemas planos *(ver quadro na pág. 83)*. Os trabalhos que Euclides dedicou às seções cônicas encontravam-se, provavelmente, nesse escrito. Como a maior parte das obras da coleção, a exposição de Euclides tratava, com toda verossimilhança, de problemas de figuras específicas. Nada nos permite afirmar que ela se dedicava exclusivamente às seções cônicas (as mesmas observações podem ser feitas a respeito dos *Lugares sólidos*, de Aristeu). Cabe constatar, finalmente, que Proclo, entre as numerosas obras que atribui a Euclides, não inclui os *Elementos de cônicas*.

Quanto às referências arquimedianas a tais "elementos", quase todas remetem aos resultados que figuram nos livros I a IV das *Cônicas* de Apolônio, livros que o próprio autor nomeia como *Elementos*. Tais referências, portanto, provavelmente não são autênticas e foram acrescentadas mais tarde aos escritos de Arquimedes para facilitar o trabalho do leitor. Se essa explicação é válida, os acréscimos realizaram-se depois da redação das *Cônicas*, por Apolônio, mas antes da época em que Eutócio os leu. Mesmo nesse caso, há uma lacuna de 700 anos.



AKG IMAGES

A BIBLIOTECA DE ALEXANDRIA, em gravura do livro *Die Weisen und Gelehrten des Alterthums*, de Hermann Göll, 1879. Apolônio foi educado em Alexandria, onde também lecionou antes de ir para Pérgamo

Em resumo, a acusação de Heráclido, tal como mencionada por Eutócio, permanece enigmática, a menos que o comentador não as tenha compreendido adequadamente e ela diga respeito a um conjunto determinado de proposições acerca das cônicas, que Arquimedes teria estabelecido antes de Apolônio. Contudo, Eutócio devia saber que essas curvas haviam sido estudadas antes dos dois autores, especialmente por Aristeu e Euclides. Em seu comentário à proposição II-1 de *A esfera e o cilindro*, de Arquimedes, ele fornece dois outros testemunhos sobre a história das seções cônicas.

Invenção de Menecmo?

Esse comentário de Eutócio contém uma antologia de soluções para o problema da inserção de duas médias proporcionais entre duas retas dadas. Uma das duas referências que Eutócio fornece sobre a história das seções cônicas é a solução atribuída ao geômetra Menecmo de Proconese, que mostra como realizar a inserção com auxílio de uma parábola e uma hipérbole. Menecmo e seu irmão Dinostrato eram discípulos de Eudoxo de Cnido, contemporâneos de Alexandre, o Grande. As primeiras pesquisas sobre essas curvas, portanto, remontam à metade do século IV a.C. Na passagem de Eutócio, a denominação de "cônicas" já é a mesma utilizada por Apolônio, de onde se conclui que nosso comentador, embora tenha conservado o método original, modernizou a expressão.

A solução é teórica. Ela pressupõe que se saiba caracterizar as curvas cônicas como lugares definidos por igualdades de áreas *(as condições (i)-(ii) no quadro ao lado)*. A hipérbole eqüilátera, por exemplo, é o lugar dos pontos H tais que o produto de sua distância a duas retas perpendiculares, DF e DK, é dado. A síntese exige, por outro lado, que se possua um meio efetivo de construir as curvas. Para quem dispõe do tratado de Apolônio, as

Da análise à síntese

A análise de um problema consistia em supor o problema resolvido e explorar as conseqüências dessa suposição. Vejamos como Menecmo aplicou esse método para resolver o problema da inserção de duas retas proporcionais, B e C, entre duas retas dadas, A e E. Queremos encontrar B e C tais que $A/B = B/C = C/E$.

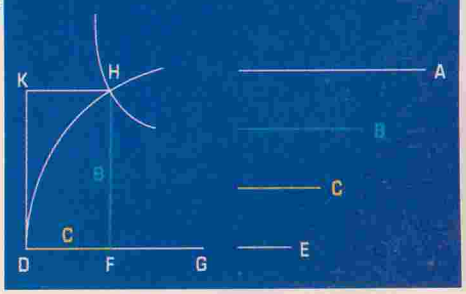
- De $A/B = B/C$, deduz-se que $B^2 = AC$ (i) (o quadrado descrito sobre B é igual ao retângulo delimitado por A e C, sendo A um segmento dado).

- De $A/B = C/E$, deduz-se que $BC = AE$ (ii) (o retângulo delimitado por B e C é igual ao delimitado por A e E, segmentos dados; a área do último retângulo, portanto, é dada).

Tomemos um ponto D e, sobre uma reta DG que sai de D, marquemos o segmento DF igual a C. Tracemos a perpendicular em F a DG, sobre a qual traçamos FH igual a B. A relação (i) significa que o ponto H pertence a uma parábola ($y^2 = Ax$) de vértice D, definida pelo parâmetro dado A; e (ii) estabelece que o ponto H pertence a uma hipérbole eqüilátera ($xy = AE$) com assíntotas DF e DK, em que DK é a paralela a FH que passa por D.

Em resumo, ao supor o problema resolvido, o ponto H é a intersecção de duas curvas, uma parábola e uma hipérbole, e as duas médias procuradas, B e C, são os segmentos HF e FD (= HK). Descrevemos, assim, aquilo que os antigos chamavam de análise.

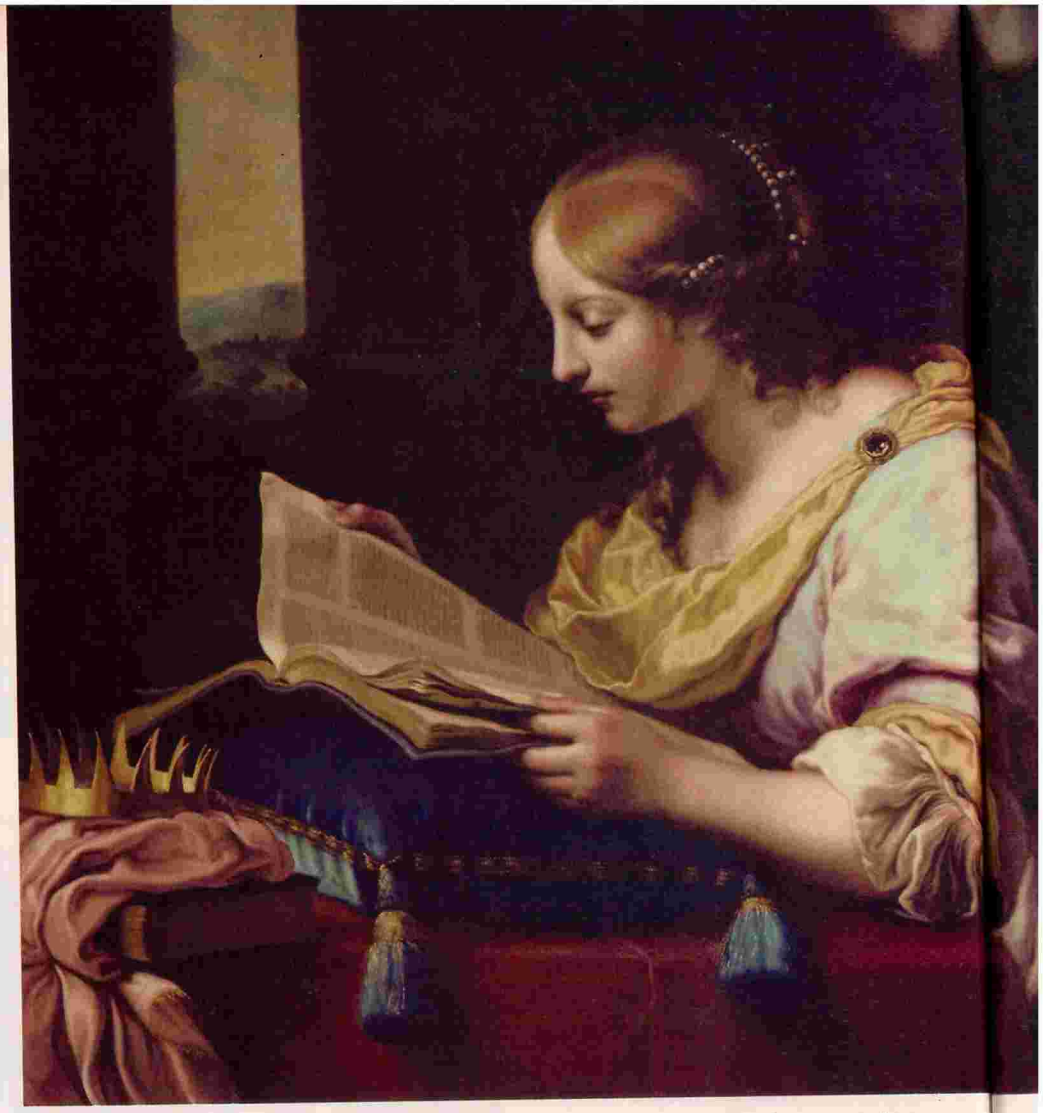
Para resolver o problema, é necessário saber construir uma parábola e uma hipérbole, das quais certas características são dadas. Para a parábola, conhece-se o vértice D e o fator A; para a hipérbole, as duas assíntotas DF e DK e a área delimitada por cada um de seus pontos com as restas DG e DK, sempre igual à área do retângulo delimitado por A e E. O ponto de intersecção H entre as duas curvas irá determinar a solução do problema, ou seja, HF e FD. Tal é a síntese proposta por Menecmo.



construções são bem conhecidas, mas que sabia Menecmo a esse respeito? Será que ele sabia que as condições (i) e (ii) caracterizam duas seções do cone? Teriam essas construções sido descobertas durante as pesquisas sobre o problema das duas médias proporcionais, como acreditam alguns historiadores? Ou será que já estavam disponíveis para Menecmo? Se estavam, então as curvas cônicas teriam sido introduzidas em geometria com outro tipo de problema, como óptica ou gnomônica. Sobre isso, Eutócio nada diz.

Graças ao comentador, há outra informação sobre o trabalho de Menecmo. Ele reproduz o epigrama de Eratóstenes na dedicatória de seu *Mesolábio*. Para valorizar a eficácia de sua solução para o problema das médias proporcionais (e criticar as soluções anteriores), convida o leitor a "desistir dos laboriosos métodos de Arquitas, com seus cilindros, ou de seccionar o cone segundo as tríades de Menecmo, ou de descrever as formas curvas da maneira como fez o divino Eudoxo". O famoso bibliotecário confirma que a descoberta foi de Menecmo. Eratóstenes sabe que as curvas procuradas podem ser geradas pela seção do cone, e atribui esse conhecimento a Menecmo. Haveria aí uma licença poética anacrônica?

A expressão "tríades de Menecmo" é bastante enigmática (ela aparece também em Proclo). Alguns estudiosos pensam que se trata de três curvas específicas (duas parábolas e uma hipérbole) associadas ao método de resolução de Menecmo, enquanto outros acreditam tratar-se das três espécies de cônicas: elipse, parábola e hipérbole.

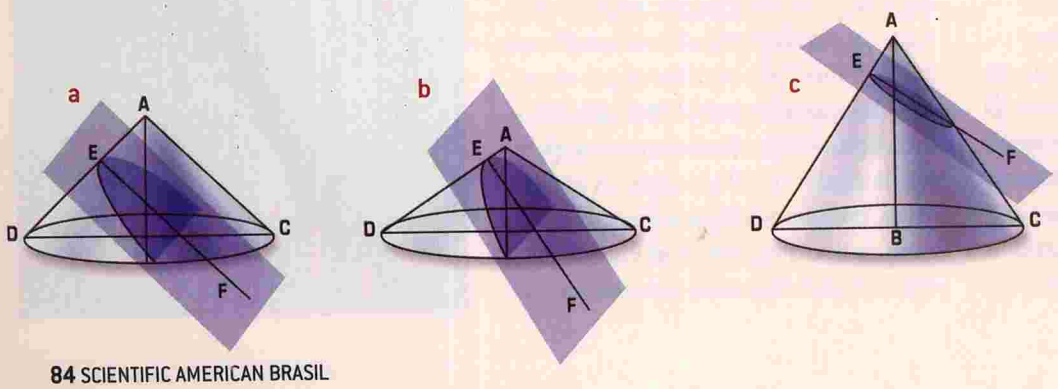


RETRATO DE HIPÁCIA de Alexandria, filha de Theon, pintado por Onório Marinari, em 1700. Seus comentários sobre as seções cônicas contribuíram para a preservação da obra de Apolônio

Construção de Aristeu

Não sabemos como Menecmo construía suas curvas, mas temos as considerações de Gêminus de Rodes e as observações de Pappus, ambas citadas por Eutócio. O objetivo desses autores é opor duas maneiras de conceber as cônicas como seções de um cone, a antiga (de Aristeu) e a nova (de Apolônio). Gêminus observa que, segundo os antigos, o cone é a figura gerada pela revolução da hipotenusa de um triângulo retângulo em torno de um dos lados do ângulo reto. Todos os cones definidos dessa maneira são ditos "retos" – seu eixo é perpendicular ao plano da base. Essa construção corresponde às definições do livro XI dos *Elementos* de Euclides, onde aparecem três tipos de cone: "retângulo", "acutângulo" e "obtusângulo" *(ver figura abaixo)*.

Aristeu definia as cônicas como curvas geradas pela seção de cada um desses



a) Cone retângulo (o ângulo DAC é reto). *b*) Cone obtusângulo (o ângulo DAC é obtuso). *c*) Cone acutângulo (o ângulo DAC é agudo). A intersecção desses três cones com um plano perpendicular a uma geratriz permite distinguir os três tipos de cônicas

AKG IMAGES

cones por um plano posicionado perpendicularmente a uma geratriz, por exemplo AD na figura. Seja então EF a intersecção desse plano perpendicular com o plano ADC.

Podemos ver que: 1) no cone retângulo, EF é paralela a AC; 2) no cone obtusângulo, EF afasta-se de AC (mas, se fosse prolongado do outro lado de AD, cortaria a reta CA); 3) no cone acutângulo, EF corta AC (ou seu prolongamento). Nos dois primeiros casos, as seções são infinitas; no terceiro, porém, obtém-se uma espécie de oval.

Aristeu privilegiava um único modo de seccionar o cone por meio de planos, colocados perpendicularmente a uma geratriz. Por isso, nomeava as três curvas obtidas de "seção do cone" acutângulo, do retângulo e do obtusângulo. Esses nomes ainda apa-

Os symptomata *das cônicas*

Aristeu definiu as seções cônicas a partir da intersecção do cone retângulo, obtusângulo e acutângulo com um plano. Dessa definição, ele extraiu caracterizações simples e elegantes (*symptomata*) para as curvas.

No cone retângulo

Seja um cone retângulo AQR. Por um ponto E da geratriz AQ, façamos passar um plano perpendicular a AQ. A intersecção desse plano com o cone é uma seção de cone retângulo. Seja EP a intersecção desse plano com um plano meridiano do cone, AQR. Seja K um ponto de EP.

Consideremos dois planos, paralelos à base do cone, que passam por K e E; suas intersecções com o cone são, respectivamente, os círculos de diâmetros DC e EG. Por K, traça-se a perpendicular a DC no plano perpendicular a AQ. Essa reta corta o círculo de diâmetro DC em L. O ponto L, portanto, está na superfície do cone e no plano perpendicular a AQ que passa por E. Assim, L é um ponto da seção de cone retângulo.

Mostremos que $KL^2 = DK.KC$. Os triângulos CKL e LKD são retângulos e semelhantes, portanto $KL/KC = DK/KL$.

Como KC = EG, pois EGCK é um paralelograma por construção, então $KL^2 = DK.EG = 2DK.EH$, em que H está na metade de EG. Além disso, como os triângulos AEG, AEH e DEK são todos semelhantes, temos: DK/KE = AE/EH, ou seja, DK.EH = AE.EK. Assim, $KL^2 = 2AE.EK$. Em terminologia antiga, o quadrado descrito sobre a reta KL (a ordenada), aplicado sob a forma de retângulo sobre uma reta igual a 2AE, produz a reta EK como largura. Em notação moderna, coloca-se y = KL, x = EK e p = AE. A equação $y = 2px$ traduz o fato de que L pertence à seção cônica.

Nos cones obtusângulo e acutângulo

Suponhamos o cone AQR obtusângulo. Os pontos E, P, K, D, C, G e L são construídos como antes. L é um ponto da seção de cone obtusângulo obtida pela intersecção do cone com o plano perpendicular a AQ.

Seja M a intersecção das retas EP e AR, e B a intersecção do eixo do cone com EP. As perpendiculares a EG em G e a DC em C cortam EP em H e F.

No círculo de diâmetro DC, temos $KL^2 = DK.KC$.

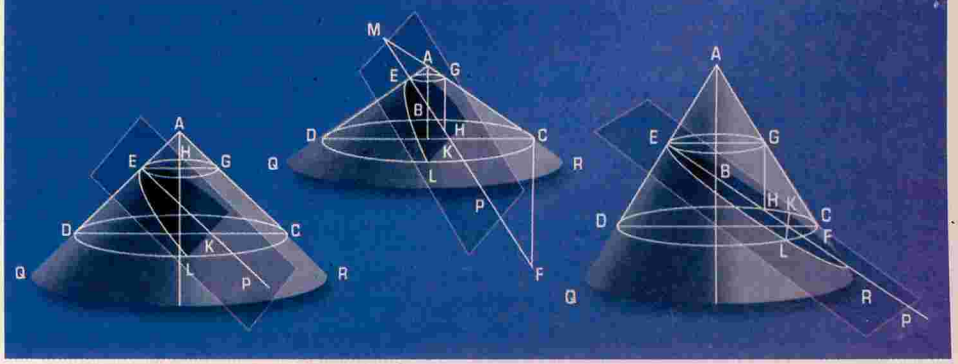
Além disso, os triângulos retângulos EKD e CKF são eqüiângulos, portanto semelhantes. Daí, EK/KD = CK/KF, ou seja, EK.KF = DK.KC. Assim, $KL^2 = EK.KF$.

Os triângulos KCF e EGH são semelhantes, portanto FK/HE = CK/GE. Além disso, de acordo com o teorema de Tales, CK/GE = MK/ME. Assim, FK/MK = HE/ME.

Multiplicando o membro da esquerda por EK/EK, obtemos: (EK.FK)/(EK.MK) = HE/ME, com HE = 2EB (de acordo com o teorema de Tales aplicado ao triângulo AGH). Como $KL^2 = EK.KF$, temos então $KL^2/EK.MK = 2EB/ME$.

Os comprimentos BE e EM dependem da posição do plano secante. A razão 2EB/ME, portanto, é dada. Em terminologia antiga, a razão entre o quadrado descrito sobre a ordenada KL e o retângulo delimitado pelas retas EK e MK, cortadas pela ordenada sobre o eixo da curva, é uma razão fixa. Em notação moderna, coloca-se y = KL, x_1 = EK, x_2 = MK, EM = a e EB = p (distância entre o vértice da curva e o eixo do cone). O fato de que o ponto L pertence à seção cônica é traduzido pela equação $y^2/x_1x_2 = 2p/a$.

Fato notável, o *symptoma* da seção de cone acutângulo é exatamente igual, mas agora com o ponto M do mesmo lado que R em relação a A.



O estudo de Apolônio

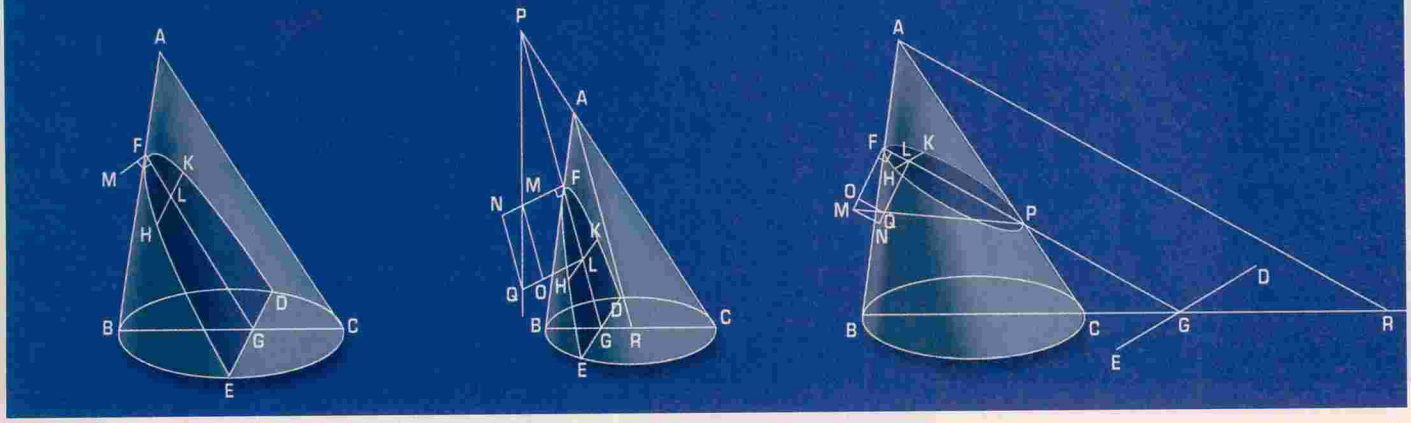
Apolônio caracteriza as três seções cônicas por "aplicação de uma área sobre uma reta dada". Para ele, uma seção cônica é a intersecção de um cone, com vértice em A e base no círculo de diâmetro BC, com um plano que corta a reta AB em F e a base do cone em uma reta DE perpendicular a BC. Seja G o meio de ED. H é um ponto qualquer da cônica, e a reta paralela a ED que passa por H corta FG e a cônica, respectivamente, em L e K. Apolônio introduz então um segmento FM perpendicular ao plano da cônica, que ele chama de parâmetro da seção, e cujo comprimento verifica certas condições *ad hoc*.

1) a parábola: o segmento FM é tal que $FM/FA = BC^2/(BA.AC)$. Apolônio mostra que, para todo ponto H, $HL^2 = FM.FL$. Esse resultado lembra o *symptoma* de Aristeu, mas o valor do parâmetro FM é mais complicado.

2) a hipérbole: seja P o ponto de intersecção de FG com AC, e seja R o ponto de BC tal que AR fique paralela a FG. FM é tal que $FP/FM = AR^2/(BR.RC)$. Seja a paralela a FM que passa por L, no mesmo plano, e Q a intersecção dessa reta com PM. Completa-se o retângulo FNQL e traça-se MO, paralela a FL.

3) a elipse: seja o ponto R de BC tal que AR fique paralela a FG. FM é tal que $FG/FM = AR^2/(BR.RC)$. Completa-se o retângulo definido por F, L e M com o ponto N. Seja P a intersecção de FG e AC. Q é a intersecção de PM e LN, e O é tal que FOQL forma um retângulo.

Para 2 e 3, Apolônio estabelece que, para todo ponto H, o quadrado sobre a ordenada HL é igual, respectivamente, aos retângulos FNQL e FOQL, ambos com largura FL (que chamamos de abscissa, porção do diâmetro determinada pela ordenada). Em terminologia antiga, FNQL é aplicada sobre a reta FM com a figura MQQN "em excesso", a qual é semelhante ao retângulo delimitado por PF e FM (esse retângulo é dado), enquanto FOQL é aplicada sobre a reta FM com a figura MQQN "em falta", a qual é semelhante ao retângulo delimitado por FP e FM (também ele dado).



recem nos escritos de Arquimedes, e o termo "seção do cone retângulo" é usado por Dioclo, na mesma época, em seu tratado dos *Espelhos ardentes*. Nossos autores deduzem imprudentemente que Aristeu não sabia da possibilidade de obter os três tipos de seção a partir de um mesmo cone, pela variação do ângulo AEF, e afirmam que a descoberta é de Apolônio.

Essa versão, porém, tem poucas chances de ser verdadeira. Euclides, em seus *Fenômenos*, observava que "a seção de um cone ou de um cilindro por um plano não paralelo à base é uma seção de cone acutângulo, semelhante a um escudo". Encontra-se observação semelhante em Arquimedes, que às vezes considera a mesma seção de cone acutângulo como gerada tanto por um cone reto como por um oblíquo. Portanto vários tipos de seção para gerar o mesmo tipo de curva foram criados antes de Apolônio. A razão por que Aristeu impôs tal limitação às suas definições deve-se ao objetivo que perseguia: esse procedimento permitia-lhe obter uma caracterização simples e elegante para cada um dos três tipos de cônica, aquilo que os antigos chamavam de *symptoma* de uma curva e que os modernos associam a sua equação.

Abordagem Diferente

Basta abrir o primeiro livro das *Cônicas* de Apolônio para compreender que a perspectiva adotada por ele não é a mesma e que ele busca atingir um alto grau de generalidade. Logo na primeira definição, descreve a superfície cônica, não o cone, da seguinte maneira: "Se, a partir de um certo ponto, estende-se a uma circunferência de círculo, não situada no mesmo plano que esse ponto, uma reta prolongada dos dois lados, e se, enquanto o ponto permanece fixo, a reta é deslocada ao longo da circunferência até retornar à posição de onde havia começado a se mover, eu chamo de superfície cônica aquela que, descrita pela reta, é composta de duas superfícies opostas pelo vértice...".

Em primeiro lugar, a superfície cônica possui duas "porções", opostas pelo vértice; em segundo lugar, ao cortá-la no vértice para gerar aquilo que Apolônio chama de cone, este poderá ser reto ou oblíquo. As definições 4 a 8 deixam ainda mais desnorteado o leitor pouco familiarizado com as seções cônicas. Para toda curva plana, Apolônio chama de "diâmetro" uma reta que, posicionada no interior dessa curva, corte em duas partes iguais todos os segmentos de reta de uma certa família, paralelos entre si. Esses seg-

mentos são depois chamados de "retas posicionadas de maneira ordenada".

Ele introduz noções semelhantes para duas curvas coplanares: de um lado, a reta que, ao cortar as duas curvas, é diâmetro das duas no sentido precedente (diâmetro "transverso"); do outro, a reta que, situada entre as duas curvas, corta em duas partes iguais todos os segmentos interceptados entre as duas curvas e paralelos a uma outra reta dada (diâmetro "reto"). Existem tais objetos? Por que considerar duas curvas coplanares?

Observemos, de início, que sua definição de superfície cônica permite a Apolônio considerar não somente três, mas quatro seções cônicas: parábola, elipse, hipérbole e curva, que ele denomina "seções opostas", ou seja, os dois ramos opostos de uma hipérbole. Até onde sabemos, ele é o primeiro a fazê-lo. Eis aí a justificação das duas curvas coplanares. Elas são geradas pela seção de um mesmo cone, reto ou oblíquo.

Esse método permite também gerar a circunferência, que poderia ser considerada uma quinta espécie de cônica. Apolônio prefere tratá-la separadamente. Diversas proposições de seu tratado são dedicadas a estender, para as outras seções cônicas, alguns resultados estabelecidos nos *Elementos* a respeito da circunferência. As cônicas aparecem como generalizações da circunferência. Pode-se imaginar que esse modo de gerar as cônicas iria introduzir complicações técnicas em seu estudo, se comparado à abordagem de Aristeu. A generalidade desejada por Apolônio tem seu preço.

Quanto à misteriosa noção de "diâmetro" de uma curva qualquer, sua pertinência se justifica a partir da proposição 7. A situação é a seguinte *(ver quadro na pág. 86)*: corta-se um cone qualquer, de vértice A e com base em um círculo de diâmetro BC, por dois planos, um que contém o eixo do cone, como ABC, e outro que corta a geratriz AB em F e a base do cone segundo uma reta DE, perpendicular à reta BC. O primeiro plano determina um triângulo ABC ("axial"), e o segundo, uma seção cônica. Seja FG a intersecção do segundo plano com o triângulo ABC. Três casos podem ocorrer, caso a reta FG seja paralela a AC, corte o segmento AC, ou corte o prolongamento de AC.

Apolônio mostra que, nos três casos, se tomarmos um ponto H qualquer sobre a seção cônica e estendermos, a partir de H, uma reta paralela a DE, até sua outra intersecção com a seção cônica (o ponto K), a reta FG cortará o segmento HK exatamente no meio. Se o cone for reto, FG será perpendicular a HK, mas isso não ocorre necessariamente no caso de um cone oblíquo (somente se o triângulo axial escolhido for perpendicular à base do cone). Em todos os três casos, segundo Apolônio, a reta FG é um diâmetro da seção cônica para as ordenadas dispostas paralelamente a DE. Quando ela é perpendicular à direção das ordenadas, Apolônio chama-a de "eixo" da seção cônica.

Em outra mostra de virtuosismo, Apolônio caracteriza as três seções por meio de uma operação denominada "aplicação de uma área sobre uma reta dada". Usada já por Euclides, existem três variantes dessa operação: a aplicação simples, a por excesso e a por falta de uma figura (geralmente um retângulo) semelhante a uma figura dada. Foi a partir desses nomes, usuais em grego, de aplicação simples (*parabolé* em grego), por excesso (*hyperbolé*) e por falta (*élleipsis*), que Apolônio derivou sua nomenclatura para as cônicas. Tratamos aqui das primeiras proposições do livro I. O leitor pode imaginar a tecnicidade da obra pela informação, fornecida por Pappus, de que as *Cônicas* contêm 487 teoremas. O livro VIII foi perdido mas é provável que tivesse mais de uma centena.

No entanto, Apolônio não pretendia reunir todos os conhecimentos da época sobre o assunto. Seu objetivo foi fornecer uma exposição (sintética) das propriedades das cônicas que pudessem ser utilizadas para a resolução de problemas geométricos, tais como os problemas de lugar, e para a determinação das condições de sua resolubilidade. Seus sucessores reconheceram essa intenção, e incluíram corretamente seu tratado na coleção "do Lugar analisado". *(BV)*

MANUSCRITO ÁRABE das *Cônicas*. Devemos a preservação de sete de seus oito livros aos três filhos do astrônomo Musa ibn Shakir – alcunhados Banu Musa –, eles mesmos matemáticos. Foram educados na "Casa da Sabedoria", em Bagdá, quando encontraram um manuscrito com os sete primeiros livros. De início, porém, o escrito pareceu-lhes incompreensível. Mais tarde, um deles, Ahmad, obteve um posto administrativo na Síria, onde procurou o manuscrito dos quatro primeiros livros na versão reeditada por Eutócio, o que lhe permitiu compreender o conjunto