



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICA

Allan David Moreira D'avila

Ações de Grupos e aplicações nas últimas décadas

Florianópolis
2026

Allan David Moreira D'avila

Ações de Grupos e aplicações nas últimas décadas

Trabalho da graduação apresentado na disciplina
MTM7305-05222 (20261) - História da Ma-
temática.

Florianópolis
2026

RESUMO

Este trabalho apresenta uma abordagem unificada da teoria de ações de grupos e de suas aplicações contemporâneas em diferentes ramos da ciência, partindo dos conceitos estruturais da álgebra abstrata e evoluindo para a modelagem geométrica e topológica de fenômenos complexos. A pesquisa detalha desde fundamentos clássicos como os Teoremas de Sylow e o Teorema de Morley no plano complexo até as contribuições revolucionárias na biologia molecular por meio da Teoria de Tranças aplicada ao enovelamento do DNA pelas mãos de pesquisadoras como Erica Flapan e Dorothy Buck. Adicionalmente, o estudo explora o impacto dessa teoria na computação de fronteira e na engenharia moderna, evidenciando sua relevância prática na consolidação da criptografia pós-quântica, no desenvolvimento de redes neurais artificiais equivariantes e na otimização de sistemas de localização espacial para veículos autônomos por meio de Grupos de Lie.

ABSTRACT

This dissertation presents a unified approach to group action theory and its contemporary applications across diverse scientific domains, originating from the structural concepts of abstract algebra and advancing toward the geometric and topological modeling of complex phenomena. The research covers classical foundational principles such as the Sylow Theorems and Morley's Theorem in the complex plane, extending to revolutionary contributions in molecular biology through Braid Theory applied to DNA knotting and entanglement as pioneered by researchers Erica Flapan and Dorothy Buck. Additionally, the study explores the profound impact of this theory on frontier computing and modern engineering, demonstrating its practical relevance in the consolidation of post-quantum cryptography, the development of group equivariant convolutional neural networks, and the trajectory optimization of autonomous vehicles using Lie Groups.

Lista de Figuras

2.1.1 Connes em 2004	16
2.1.2 Triângulo de Morley	21
2.1.3 Ponto fixo P	22
2.1.4 Ponto fixo Q	23
2.1.5 Ponto fixo R	23
2.1.6 Pontos fixos de $g_1^3 g_2^3 g_3^3$	24
2.1.7 Pontos fixos de $g_1^3 g_2^3 g_3^3$	25

Sumário

1	Fundamentação Teórica de Ações de Grupos	7
1.1	Introdução	7
1.2	Notações e Definições	7
1.3	Teorema de partições e órbita-estabilizador	9
1.4	Lema de Burnside	13
2	Estudos e Artigos	16
2.1	Alain Connes	16
2.1.1	Grupo Afim	17
2.1.2	Teorema de Morley	17
2.2	Erica Flapan	25
2.3	Dorothy Buck	26
2.4	Ações do Grupo de Tranças e a Topologia do DNA	27
2.5	Aplicações Recentes: Computação e IA	28
	Referências	29

1 Fundamentação Teórica de Ações de Grupos

1.1 Introdução

A busca pela compreensão da simetria tem sido um dos principais motores do desenvolvimento científico ao longo dos séculos. Longe de ser um conceito puramente estático ou estético, a simetria na matemática contemporânea é investigada por meio da dinâmica de suas transformações. A ferramenta algébrica fundamental para formalizar esse estudo é a Teoria de Grupos. No entanto, quando o objetivo é compreender como essas estruturas abstratas interagem com o espaço geométrico ou topológico, recorre-se ao conceito de *ações de grupos*. Uma ação de grupo permite, essencialmente, “fazer o grupo mover o espaço”, traduzindo propriedades algébricas abstratas em transformações geométricas concretas.

1.2 Notações e Definições

Definition 1.2.1. *Seja G um grupo e X um conjunto não vazio. Uma **ação de G sobre X** é definida como um homomorfismo de grupos*

$$\alpha : G \rightarrow S_X \tag{1.2.1}$$

que associa a cada elemento $g \in G$ uma permutação do conjunto X . Nesse contexto, dizemos que G atua em X por meio de simetrias do próprio conjunto.

Uma notação para a ação pode ser $G \overset{\alpha}{\curvearrowright} X$ a qual α denota a permutação, porém se α está claro, usamos apenas $G \curvearrowright X$

Lemma 1.2.1. *A definição de uma ação de um grupo G sobre um conjunto não vazio X via homomorfismo $\alpha : G \rightarrow S_X$ é equivalente à existência de uma aplicação, denominada **lei de ação**:*

$$\begin{aligned} \cdot : G \times X &\longrightarrow X \\ (g, x) &\longmapsto g \cdot x \end{aligned}$$

que satisfaz, para quaisquer $g, h \in G$ e $x \in X$, os seguintes axiomas:

- (i) *Identidade:* $e \cdot x = x$, onde e denota o elemento neutro de G ;
- (ii) *Compatibilidade:* $(g \cdot h) \cdot x = g \cdot (h \cdot x)$.

Observation 1.2.1. *Embora as definições anteriores tratem de ações à esquerda, é possível definir, de maneira análoga, uma **ação à direita** como uma aplicação $\cdot : X \times G \rightarrow X$ que satisfaz:*

1. $x \cdot e = x$;
2. $(x \cdot g) \cdot h = x \cdot (gh)$;

para quaisquer $x \in X$ e $g, h \in G$. Salvo menção em contrário, assumiremos neste trabalho que todas as ações ocorrem à esquerda.

1.3 Teorema de partições e órbita-estabilizador

Lemma 1.3.1. *Seja $G \curvearrowright X$ uma ação do grupo G sobre o conjunto X .*

1. *Para qualquer x , $Stab(x) \leq G$.*

2. *Para $g \in G$ e $x \in X$, temos*

$$Stab(g \cdot x) = gStab(x)g^{-1}$$

3. *As órbitas de $G \curvearrowright X$ formam uma partição do conjunto X*

Demonstração. 1. Para isto, devemos verificar que $Stab(x)$ é fechado por produtos e inversos:

(a) $Stab(x)$ é fechado por produto: Assim, dado $g, h \in Stab(x)$, temos que $(g \cdot h) \cdot x = g \cdot (h \cdot x) = g \cdot x = x$, logo $g \cdot h \in Stab(x)$;

(b) $Stab(x)$ é fechado por inverso: multiplicando g^{-1} à esquerda fornece

$$\begin{aligned} g \in Stab(x) &\iff g \cdot x = x \\ &\iff g^{-1} \cdot (g \cdot x) = g^{-1} \cdot x \\ &\iff (g^{-1}g) \cdot x = g^{-1} \cdot x \\ &\iff e \cdot x = g^{-1} \cdot x \\ &\iff x = g^{-1} \cdot x \\ &\iff g^{-1} \in Stab(x) \end{aligned}$$

2. Devemos verificar que $h \in Stab(g \cdot x) \iff h \in g \cdot Stab(x) \cdot g^{-1}$ para $h \in G$.

$$\begin{aligned}
h \in \text{Stab}(g \cdot x) &\iff h \cdot (g \cdot x) = g \cdot x \\
&\iff g^{-1} \cdot (h \cdot (g \cdot x)) = g^{-1} \cdot (g \cdot x) \\
&\iff (g^{-1}hg) \cdot x = (g^{-1}g) \cdot x \\
&\iff (g^{-1}hg) \cdot x = e \cdot x \\
&\iff (g^{-1}hg) \cdot x = x \\
&\iff g^{-1}hg \in \text{Stab}(x) \\
&\iff h \in g\text{Stab}(x)g^{-1}
\end{aligned}$$

3. Para provar a formação de partições pelas órbitas, basta mostrar que a relação $x \sim y \iff x \in G \cdot y$ é uma relação de equivalência. Seja $G \curvearrowright X$ uma ação e $x_1, x_2, x_3 \in X$ e $g, h \in G$.

- (a) **(Reflexiva)** Pela hipótese que G é grupo sabemos por G2 que $e \in G$, logo $e \cdot x_1 = x_1$ portanto x_1 pertence a própria órbita.
- (b) **(Simetria)** Suponhamos que $x_1 \sim x_2$. Isso significa que existe um $g \in G$ tal que $g \cdot x_1 = x_2$. Como G é um grupo, ele possui o inverso g^{-1} . Então, aplicando g^{-1} a ambos os lados da igualdade $g \cdot x_1 = x_2$, obtemos:

$$g^{-1} \cdot x_2 = g^{-1} \cdot (g \cdot x_1) = (g^{-1}g) \cdot x_1 = e \cdot x_1 = x_1.$$

Portanto, $g^{-1} \cdot x_2 = x_1$, o que implica $x_2 \sim x_1$.

- (c) **(Transitividade)** Suponhamos que $x_1 \sim x_2$ e $x_2 \sim x_3$. Isso significa que existem $g, h \in G$ tais que:

$$g \cdot x_1 = x_2 \quad \text{e} \quad h \cdot x_2 = x_3.$$

Substituindo x_2 da primeira equação na segunda, temos:

$$h \cdot (g \cdot x_1) = x_3.$$

Usando a associatividade da ação de G , podemos reescrever isso como:

$$(hg) \cdot x_1 = x_3.$$

Como $hg \in G$, existe um único $k = hg \in G$ tal que $k \cdot x_1 = x_3$. Isso implica que $x_1 \sim x_3$.

Logo, a relação $\sim$ é transitiva, pois se $x_1 \sim x_2$ e $x_2 \sim x_3$, então $x_1 \sim x_3$. ■

Definition 1.3.1. O conjunto das órbitas de uma ação $G \curvearrowright X$ é denotado por X/G . Esta notação é consistente com a noção de quociente de X pela relação de equivalência (partição) definida pelas órbitas da ação.

Definition 1.3.2. Seja G um grupo e $H = \text{Stab}(x)$ o subgrupo estabilizador de um elemento $x \in X$. O conjunto das classes laterais à esquerda de H em G , denotado por G/H , é a coleção de todos os subconjuntos de G da forma:

$$gH = \{gh \mid h \in H\} \tag{1.3.1}$$

para cada $g \in G$.

Theorem 1.3.1. (Teorema da órbita-estabilizador) Seja $G \curvearrowright X$ Uma ação do grupo G sobre o conjunto X . Dado $x \in X$, temos uma bijeção entre o conjunto das classes laterais à esquerda de $\text{Stab}(x)$ e a órbita de x :

$$\begin{aligned} \psi : G/\text{Stab}(x) &\rightarrow G \cdot x \\ g \cdot \text{Stab}(x) &\mapsto g \cdot x \end{aligned}$$

Logo o tamanho da órbita de x é igual ao índice de seu estabilizador:

$$|G \cdot x| = [G : \text{Stab}(x)]$$

Em particular, se G é finito,

$$|G \cdot x| = \frac{|G|}{|\text{Stab}(x)|}$$

Demonstração. Para demonstrar o teorema, devemos verificar que a aplicação ψ está bem definida, é injetora e sobrejetora.

(Boa definição e Injetividade): Sejam $g_1, g_2 \in G$. A aplicação ψ está bem definida se a imagem de uma classe lateral não depende do representante escolhido. Reciprocamente, ela será injetora se imagens iguais implicarem classes iguais. Analisamos a seguinte cadeia de equivalências:

$$\begin{aligned}
 g_1 \text{Stab}(x) = g_2 \text{Stab}(x) &\iff g_2^{-1}g_1 \in \text{Stab}(x) \\
 &\iff (g_2^{-1}g_1) \cdot x = x \\
 &\iff g_2 \cdot ((g_2^{-1}g_1) \cdot x) = g_2 \cdot x \\
 &\iff (g_2 g_2^{-1}g_1) \cdot x = g_2 \cdot x \\
 &\iff g_1 \cdot x = g_2 \cdot x \\
 &\iff \psi(g_1 \text{Stab}(x)) = \psi(g_2 \text{Stab}(x))
 \end{aligned}$$

A leitura da esquerda para a direita garante que ψ está bem definida. A leitura da direita para a esquerda garante que ψ é injetora.

(Sobrejetividade): Por definição, qualquer elemento na órbita $G \cdot x$ é da forma $y = g \cdot x$ para algum $g \in G$. Para tal y , basta tomar a classe lateral $g \text{Stab}(x) \in G/\text{Stab}(x)$, cuja imagem por ψ é precisamente:

$$\psi(g \text{Stab}(x)) = g \cdot x = y$$

Portanto, ψ é sobrejetora. Sendo ψ uma bijeção, temos que a cardinalidade do domínio é igual a cardinalidade do contradomínio, ou seja, $|G/\text{Stab}(x)| = |G \cdot x|$. Pela definição de índice de um subgrupo, concluímos que:

$$|G \cdot x| = [G : \text{Stab}(x)]$$

Se G é finito, então $[G : \text{Stab}(x)] = \frac{|G|}{|\text{Stab}(x)|}$, o que completa a demonstração. ■

Um resultado imediato deste teorema é a fórmula de classe a seguir:

Proposition 1.3.1 (Fórmula de Classe). *Seja $G \curvearrowright X$ uma ação de um grupo finito G sobre um conjunto finito X . Sejam $x_1, \dots, x_r \in X$ representantes de classe das órbitas desta ação. Então:*

$$|X| = \sum_{1 \leq i \leq r} \frac{|G|}{|\text{Stab}(x_i)|}$$

Demonstração. Como as órbitas da ação de G em X definem uma relação de equivalência, elas particionam o conjunto finito X em subconjuntos disjuntos. Dessa forma, a cardinalidade total de X é a soma das cardinalidades de cada uma de suas órbitas distintas:

$$|X| = \sum_{1 \leq i \leq r} |G \cdot x_i|$$

onde $G \cdot x_i$ representa a órbita do representante x_i .

Pelo Teorema da Órbita-Estabilizador, a cardinalidade de cada órbita $G \cdot x_i$ é igual ao índice do seu respectivo estabilizador em G . Como o grupo G é finito, temos:

$$|G \cdot x_i| = [G : \text{Stab}(x_i)] = \frac{|G|}{|\text{Stab}(x_i)|}$$

Substituindo essa igualdade diretamente na equação da partição, obtemos o resultado desejado:

$$|X| = \sum_{1 \leq i \leq r} \frac{|G|}{|\text{Stab}(x_i)|}$$

■

1.4 Lema de Burnside

Definition 1.4.1. *Seja G um grupo, X um conjunto não vazio e $g \in G$. Tomando $G \curvearrowright X$ uma ação do grupo G sobre o conjunto X . Então os pontos de X fixos por g são*

$$X^g \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in X \mid g \cdot x = x\}$$

Lemma 1.4.1. (Lema de Burnside) *Sejam G um grupo finito e X um conjunto finito. Dada uma ação $G \curvearrowright X$, o número total de órbitas desta ação é igual ao número médio de pontos fixos por elementos de G :*

$$\text{Número de órbitas} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X^g|$$

Demonstração. Podemos contar o número de órbitas associando a cada elemento de $x \in X$ um "peso" inversamente proporcional ao tamanho da sua órbita:

$$\text{Número de órbitas} = \sum_{x \in X} \frac{1}{|G \cdot x|} \quad (1.4.1)$$

Dada um órbita $G \cdot x = \{x_1, \dots, x_n\}$ com n elementos, cada $x_i \in G \cdot x_1$ contribui com "peso" $\frac{1}{n}$ na soma de 1.4.1, logo esta órbita contribui com $n \cdot \left(\frac{1}{n}\right) = 1$ em 1.4.1. Agora pelo Teorema da órbita estabilizador a soma 1.4.1 é igual a

$$\sum_{x \in X} \frac{1}{|G \cdot x|} = \sum_{x \in X} \frac{|Stab(x)|}{|G|} = \frac{1}{|G|} \sum_{x \in X} |Stab(x)|$$

Agora é necessário mostrar que

$$\sum_{x \in X} |Stab(x)| = \sum_{g \in G} |X^g|$$

Oque ocorre de uma contagem dupla, pois ambos os lados contam o número de pares $(g, x) \in G \times X$ tais que $g \cdot x = x$. ■

Example 1.4.1. Considere o grupo $G = \{e, g\}$ agindo sobre o conjunto $X = \{1, 2, 3\}$, de modo que e seja a identidade e g permuta os elementos 1 e 2, mantendo o 3 fixo. Ou seja: $g \cdot 1 = 2$, $g \cdot 2 = 1$ e $g \cdot 3 = 3$.

Para o cálculo dos estabilizadores de cada elemento de X (lado esquerdo), temos:

- $Stab(1) = \{e\} \implies |Stab(1)| = 1$
- $Stab(2) = \{e\} \implies |Stab(2)| = 1$
- $Stab(3) = \{e, g\} \implies |Stab(3)| = 2$

A soma dos tamanhos dos estabilizadores resulta em: $\sum_{x \in X} |Stab(x)| = 1 + 1 + 2 = 4$. Para o cálculo dos conjuntos fixos por cada elemento de G (lado direito), temos:

- $X^e = \{1, 2, 3\} \implies |X^e| = 3$
- $X^g = \{3\} \implies |X^g| = 1$

A soma dos tamanhos dos conjuntos fixos resulta em: $\sum_{g \in G} |X^g| = 3 + 1 = 4$. Como ambos os lados resultam no mesmo valor, verifica-se diretamente a identidade:

$$\sum_{x \in X} |Stab(x)| = \sum_{g \in G} |X^g| = 4$$

Tabela 1.4.1: Matriz de incidência da ação de G sobre X e a dupla contagem.

$G \setminus X$	1	2	3	Soma das Linhas $ X^g $
e	1	1	1	3
g	0	0	1	1
Soma das Colunas $ \text{Stab}(x) $	1	1	2	Total = 4

2 Estudos e Artigos

2.1 Alain Connes

Alain Connes destaca-se como uma das mentes mais brilhantes e originais da matemática contemporânea. Nascido na França em 1947, ele transformou profundamente a nossa compreensão sobre o espaço, a álgebra e as leis fundamentais da física. A sua trajetória é marcada por uma rara habilidade de unificar conceitos aparentemente distantes, construindo pontes sólidas entre a abstração puramente teórica e a realidade do universo físico. O principal legado de Connes reside na criação e no desenvolvimento da geometria não comutativa. Na geometria tradicional, a ordem das coordenadas em um espaço não altera o resultado das operações. Contudo, o mundo microscópico da física quântica funciona de maneira diferente, pois a medição de certas propriedades depende estritamente da ordem em que as ações são realizadas. Percebendo essa lacuna, Connes reformulou o conceito de espaço utilizando a linguagem das álgebras de operadores. Essa abordagem permitiu geometrizar estruturas que antes eram consideradas intratáveis ou caóticas, abrindo um vasto campo de exploração científica.

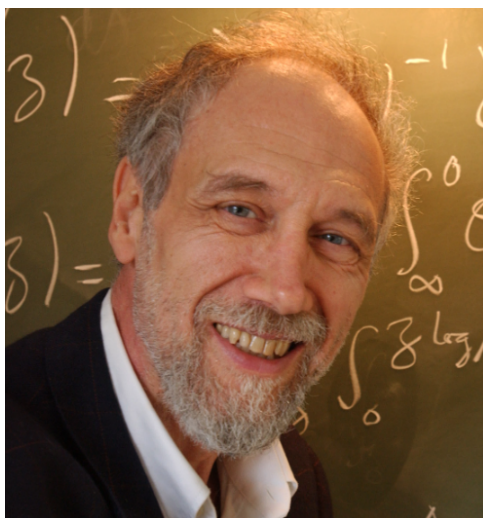


Figura 2.1.1: Connes em 2004

Alain Connes publicou em 1998 uma demonstração absolutamente brilhante e inovadora do Teorema de Morley. Enquanto a maioria das provas clássicas depende de construções geométricas engenhosas ou de cálculos trigonométricos exaustivos, Connes resolveu o problema subindo um degrau na abstração: ele traduziu a geometria do triângulo para a álgebra do grupo de transformações afins.

2.1.1 Grupo Afim

Definition 2.1.1. *Seja k um corpo e $n \in \mathbb{N}$. O grupo afim, denotado por $Af_n(k)$, é o conjunto de todas as transformações afins de k^n em si mesmo. Cada elemento de $Af_n(k)$ é representado por um par (u, A) , onde $u \in k^n$ é um vetor de translação e $A \in GL_n(k)$ é uma transformação linear invertível.*

A ação de um elemento (u, A) sobre um ponto $w \in k^n$ é definida pela aplicação da transformação linear seguida de uma translação:

$$(u, A)(w) = Aw + u \quad (2.1.1)$$

Definition 2.1.2. *O grupo afim $Af_n(k)$ está associado a um morfismo sobrejetor de grupos, denotado por δ , que mapeia cada transformação afim à sua respectiva componente linear:*

$$\delta : Af_n(k) \twoheadrightarrow GL_n(k) \quad (2.1.2)$$

$$(u, A) \mapsto A \quad (2.1.3)$$

2.1.2 Teorema de Morley

Para fundamentar a demonstração do Teorema de Morley sob a ótica das ações de grupos, torna-se indispensável estabelecer a proposição de Alain Connes [Connes \[1998\]](#), que atua como o elo entre a geometria euclidiana e a álgebra linear afim.

Proposition 2.1.1. *Sejam $g_1, g_2, g_3 \in Af_1(\mathbb{C})$ elementos do grupo afim sobre os complexos que não são translações puras, ou seja, $\delta(g_i) = a_i \neq 1$. Suponha que as composições binárias também não sejam translações:*

$$\delta(g_1 g_2) \neq 1, \quad \delta(g_2 g_3) \neq 1, \quad \delta(g_3 g_1) \neq 1 \quad (2.1.4)$$

Sejam P, Q, R os únicos pontos fixos de $g_1 g_2$, $g_2 g_3$ e $g_3 g_1$, respectivamente. Definindo $\omega = \delta(g_1 g_2 g_3) \neq 1$, as seguintes afirmações são equivalentes:

$$(i) \quad g_1^3 g_2^3 g_3^3 = id$$

$$(ii) \quad \omega^3 = 1 \text{ e } P + \omega Q + \omega^2 R = 0$$

Demonstração. $g_1^3 g_2^3 g_3^3 = id$ vamos calcular oque é $g_1^3 g_2^3 g_3^3$ dado que $g_j(z) = a_j z + b_j$.

$$\begin{aligned}
 g_j(z) = a_j z + b_j &\iff g_j^2(z) = a_j(a_j z + b_j) + b_j = a_j^2 z + a_j b_j + b_j \\
 &\iff g_j^3(z) = a_j(a_j^2 z + a_j b_j + b_j) + b_j = \\
 &\quad a_j^3 z + a_j^2 b_j + a_j b_j + b_j = a_j^3 z + (a_j^2 + a_j + 1)b_j \\
 &\iff g_j^3(z) = a_j^3 z + (a_j^2 + a_j + 1)b_j
 \end{aligned} \tag{2.1.5}$$

Agora será necessário calcular, $g_1^3 g_2^3 g_3^3$, de 2.1.5, sabemos:

- $g_1^3(z) = a_1^3 z + (a_1^2 + a_1 + 1)b_1$
- $g_2^3(z) = a_2^3 z + (a_2^2 + a_2 + 1)b_2$
- $g_3^3(z) = a_3^3 z + (a_3^2 + a_3 + 1)b_3$

Assim calculando $g_1^3 g_2^3 g_3^3(z)$:

$$\begin{aligned}
 g_1^3 g_2^3 g_3^3(z) &= g_1^3 \left(a_2^3 \left(a_3^3 z + (a_3^2 + a_3 + 1)b_3 \right) + (a_2^2 + a_2 + 1)b_2 \right) \\
 &= g_1^3 \left(a_2^3 a_3^3 z + a_2^3 (a_3^2 + a_3 + 1)b_3 + (a_2^2 + a_2 + 1)b_2 \right) \\
 &= a_1 \left(a_2^3 a_3^3 z + a_2^3 (a_3^2 + a_3 + 1)b_3 + (a_2^2 + a_2 + 1)b_2 \right) + (a_1^2 + a_1 + 1)b_1 \\
 g_1^3 g_2^3 g_3^3(z) &= a_1^3 a_2^3 a_3^3 z + a_1^3 a_2^3 (a_3^2 + a_3 + 1)b_3 + a_1^3 (a_2^2 + a_2 + 1)b_2 + (a_1^2 + a_1 + 1)b_1
 \end{aligned}$$

Vamos chamar $\star = a_1^3 a_2^3 (a_3^2 + a_3 + 1)b_3 + a_1^3 (a_2^2 + a_2 + 1)b_2 + (a_1^2 + a_1 + 1)b_1$

Por (i) sabemos que $a_1^3 a_2^3 a_3^3 = 1$, portanto $g_1^3 g_2^3 g_3^3 = id \iff \omega^3 = 1$ e $a_1^3 a_2^3 (a_3^2 + a_3 + 1)b_3 + a_1^3 (a_2^2 + a_2 + 1)b_2 + (a_1^2 + a_1 + 1)b_1 = 0$

Vamos agora calcular os pontos fixos de $g_1 g_2(z)$, $g_2 g_3(z)$, $g_3 g_1(z)$ chamandos os respectivamente de P, Q e R :

$$\begin{aligned}
g_1 g_2(z) = z &\iff g_1(a_2 z + b_2) = z \\
&\iff a_1(a_2 z + b_2) + b_1 = z \\
&\iff a_1 a_2 z + a_1 b_2 + b_1 = z \\
&\iff a_1 b_2 + b_1 = z - a_1 a_2 z \\
&\iff a_1 b_2 + b_1 = z(1 - a_1 a_2)
\end{aligned} \tag{2.1.6}$$

Isolando z e definindo-o como o ponto fixo P , e introduzindo a constante $\omega = a_1 a_2 a_3$, temos:

$$\begin{aligned}
P &= \frac{a_1 b_2 + b_1}{1 - a_1 a_2} = \frac{a_1 b_2 + b_1}{1 - \frac{a_1 a_2 a_3}{a_3}} \\
&= \frac{a_1 b_2 + b_1}{1 - \frac{\omega}{a_3}} \\
&= \frac{a_1 b_2 + b_1}{\frac{a_3 - \omega}{a_3}} \\
&= (a_1 b_2 + b_1) \cdot \frac{a_3}{a_3 - \omega} \\
&= \frac{a_3(a_1 b_2 + b_1)}{a_3 - \omega}
\end{aligned} \tag{2.1.7}$$

Analogamente para Q e R

$$Q = \frac{a_1(a_2 b_3 + b_2)}{a_1 - \omega}, \quad R = \frac{a_2(a_3 b_1 + b_3)}{a_2 - \omega}$$

Agora vamos substituir tais pontos fixos na relação $\omega^3 = 1$ e $P + \omega Q + \omega^2 R = 0$

$$\frac{a_3(a_1 b_2 + b_1)}{a_3 - \omega} + \omega \cdot \frac{a_1(a_2 b_3 + b_2)}{a_1 - \omega} + \omega^2 \cdot \frac{a_2(a_3 b_1 + b_3)}{a_2 - \omega} = 0 \tag{2.1.8}$$

tomando os termos b_j em evidência, obtemos

$$\left(\frac{a_3}{a_3 - \omega} + \frac{\omega^2 a_2 a_3}{a_2 - \omega}\right) b_1 + \left(\frac{a_1 a_3}{a_3 - \omega} + \frac{\omega a_1}{a_1 - \omega}\right) b_2 + \left(\frac{\omega a_1 a_2}{a_1 - \omega} + \frac{\omega^2 a_2}{a_2 - \omega}\right) b_3 = 0$$

Tornamos os termos em parênteses uma única fração

$$\left[\frac{a_3(a_2 - \omega) + \omega^2 a_2 a_3(a_3 - \omega)}{(a_3 - \omega)(a_2 - \omega)}\right] b_1 + \left[\frac{a_1 a_3(a_1 - \omega) + \omega a_1(a_3 - \omega)}{(a_3 - \omega)(a_1 - \omega)}\right] b_2 + \left[\frac{\omega a_1 a_2(a_2 - \omega) + \omega^2 a_2(a_1 - \omega)}{(a_1 - \omega)(a_2 - \omega)}\right] b_3 = 0$$

Ao expandir os numeradores e aplicar a identidade $\omega^3 = 1$, simplificamos as expressões para a forma final:

$$\left[\frac{a_2 a_3 - \omega a_3 + \omega^2 a_2 a_3^2 - a_2 a_3}{(a_2 - \omega)(a_3 - \omega)}\right] b_1 + \left[\frac{a_1^2 a_3 - \omega^2 a_1}{(a_1 - \omega)(a_3 - \omega)}\right] b_2 + \left[\frac{\omega a_1 a_2^2 - a_2}{(a_1 - \omega)(a_2 - \omega)}\right] b_3 = 0$$

Eliminando os termos iguais e colocando em evidência os seguintes termos

$$\frac{\omega a_3(\omega a_2 a_3 - 1)}{(a_2 - \omega)(a_3 - \omega)} b_1 + \frac{a_1(a_1 a_3 - \omega^2)}{(a_1 - \omega)(a_3 - \omega)} b_2 + \frac{a_2(\omega a_1 a_2 - 1)}{(a_1 - \omega)(a_2 - \omega)} b_3 = 0$$

Para simplificar a expressão anterior, multiplicamos a equação pelo denominador comum $(a_1 - \omega)(a_2 - \omega)(a_3 - \omega)$, eliminando as frações e obtendo:

$$\omega a_3(-1 + \omega a_2 a_3)(a_1 - \omega) \cdot b_1 + a_1(-\omega^2 + a_1 a_3)(a_2 - \omega) \cdot b_2 + a_2(\omega a_1 a_2 - 1)(a_3 - \omega) \cdot b_3 = 0$$

Utilizando o fato de que $\omega a_2 a_3 = \omega^2 / a_1$ (visto que $\omega^3 = a_1 a_2 a_3 = 1$), podemos reescrever os termos internos. Aplicando as identidades das raízes da unidade, a equação torna-se:

$$-\omega a_3(a_1 - \omega^2)(a_1 - \omega) \cdot \frac{b_1}{a_1} - \omega^2 a_1(a_2 - \omega^2)(a_2 - \omega) \cdot \frac{b_2}{a_2} - a_2(a_3 - \omega^2)(a_3 - \omega) \cdot \frac{b_3}{a_3} = 0$$

Por fim, utilizamos a relação $(a_j - \omega)(a_j - \omega^2) = a_j^2 + a_j + 1$, válida pois $\omega^2 + \omega + 1 = 0$. Multiplicando a equação por $-\omega^2 a_1/a_3$, verificamos a equivalência necessária que encerra a prova:

$$\sum_{j=1}^3 (a_j^2 + a_j + 1) \frac{b_j}{a_j} = (\star) = 0$$

■

Morais [2013] SHIRALI [2017]

Theorem 2.1.1. (Morley) *Em qualquer triângulo, os três pontos de intersecção dos pares de trissetrizes adjacentes dos ângulos internos formam os vértices de um triângulo equilátero, denominado triângulo de Morley.*

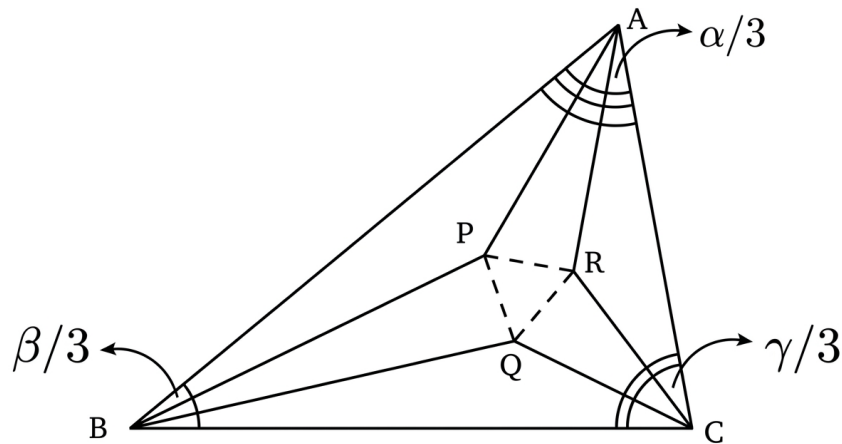


Figura 2.1.2: Triângulo de Morley

Elaborado pelo autor.

- $\triangle ACB$ é um triângulo qualquer
- $\triangle PRQ$ é equilátero

Demonstração. Tomemos α, β, γ as respectivas medidas dos ângulos A, B e C . a ideia é mostrar que os pontos P, Q, R são pontos fixos de composições de rotações duas a duas, a qual satisfazem as hipóteses de 2.1.1.

Considere:

- $g_1(z) = (z - A) \cdot e^{2\alpha i/3} + A$
- $g_2(z) = (z - B) \cdot e^{2\beta i/3} + B$
- $g_3(z) = (z - C) \cdot e^{2\gamma i/3} + C$

Cada termo g_j representa a rotação no sentido horário em torno do vértice (A ou B ou C) em ângulos de $(2\alpha i/3$ ou $2\beta i/3$ ou $2\gamma i/3)$. Agora mostraremos que os pontos P , Q e R são respectivamente pontos fixos das seguintes composições g_1g_2 , g_2g_3 e g_3g_1 . Verifiquemos para o ponto P .

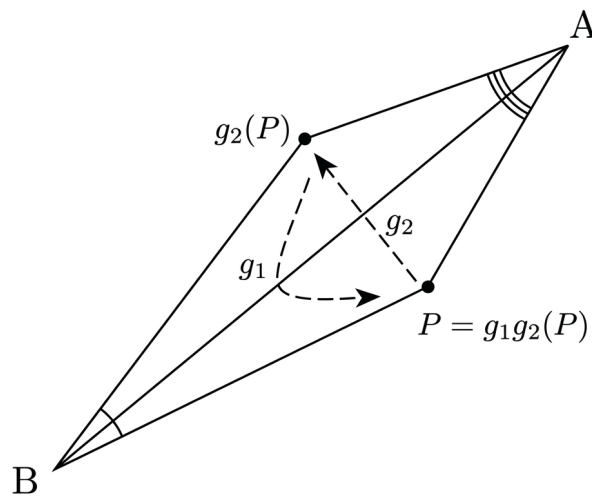
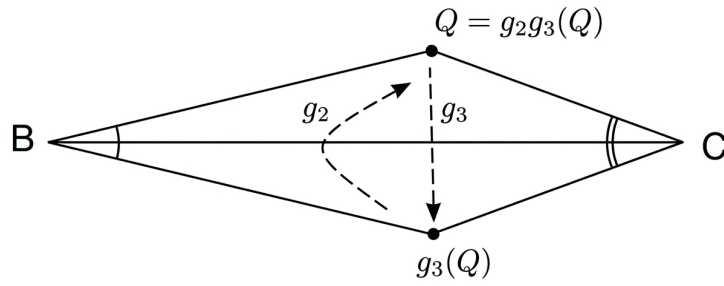


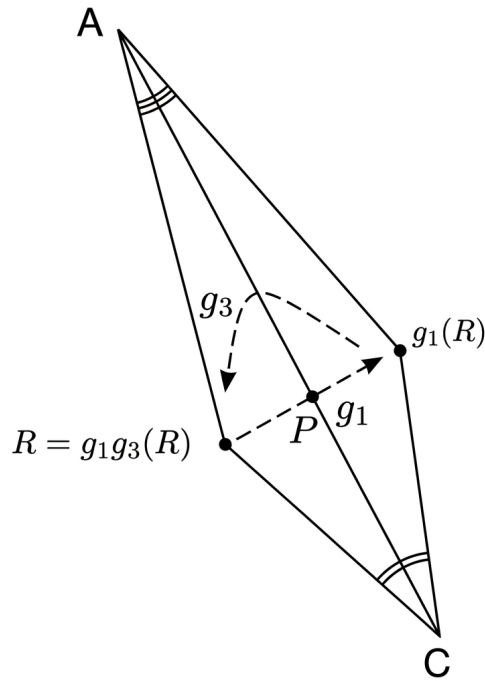
Figura 2.1.3: Ponto fixo P

Elaborado pelo autor.

Note que $g_2(z)$ "leva" P justamente a $g_2(P)$ que isto é o simétrico em relação ao lado BA , isto pois g_2 "leva" a duas partes de $\beta/3$, e g_3 "leva" o ponto duas partes de $\alpha/3$, retornando a P , portanto P é o ponto fixo de g_3g_2 . Observe que $\delta(g_3g_2) = \delta(g_3)\delta(g_2) = e^{2(\alpha+\beta)i/3} \neq 1$, portanto não é translação, oque implica seu ponto fixo ser único. Para os pontos Q e R derivam o mesmo raciocínio, conforme as imagens a seguir.

Figura 2.1.4: Ponto fixo Q

Elaborado pelo autor.

Figura 2.1.5: Ponto fixo R

Elaborado pelo autor.

$$\delta(g_2g_3) = \delta(g_2)\delta(g_3) = e^{2(\beta+\gamma)i/3} \neq 1 \text{ e } \delta(g_1g_3) = \delta(g_1)\delta(g_3) = e^{2(\alpha+\gamma)i/3} \neq 1$$

verifique que $\omega = \delta(g_1g_2g_3) = e^{2(\alpha+\beta+\gamma)i/3} = e^{2\pi i/3}$ (α, β, γ são os ângulos internos do triângulo, portanto sua soma é $180^\circ = 2\pi$), por fim $e^{2\pi i/3} \neq 1$. Agora basta mostrar que $g_1^3g_2^3g_3^3 = id$.

A ideia é mostrar que tanto A quanto C são pontos fixos, assim qualquer outro elemento de $Af_1(\mathbb{C})$ possui no máximo um ponto fixo. $g_3^3(C) = C$ pois C é o centro da rotação, veja que $g_2^3g_3^3(C)$ forma com A e B um triângulo semelhante com ABC pelo caso ângulo lado ângulo, visto que o lado BA são comuns a ambos, portanto $g_2^3g_3^3(C)A$ tem mesma medida que AC, logo $C = g_1^3g_2^3g_3^3(C)$.

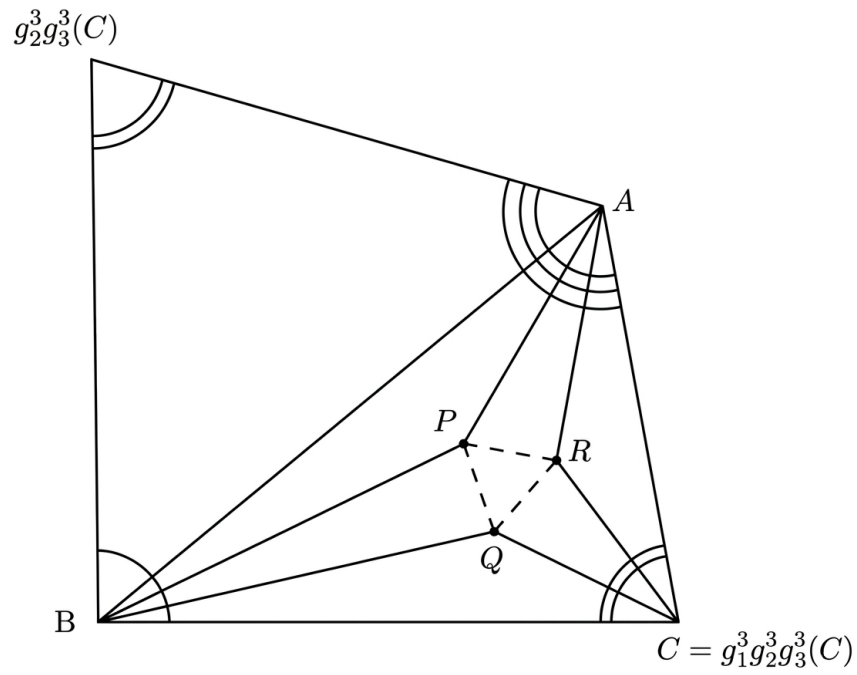


Figura 2.1.6: Pontos fixos de $g_1^3 g_2^3 g_3^3$

Elaborado pelo autor.

Para mostrar que o ponto A é ponto fixo, calculando $g_3^3(A)$ o triângulo formado pode ser avaliado na mesma semelhança do caso acima, assim $g_3^3 g_3^3(A) = A$ e como A é centro de $g_1(z)$ logo $g_1^2 g_2^3 g_3^3(A) = A$, portanto $g_1^3 g_2^3 g_3^3 = id$.

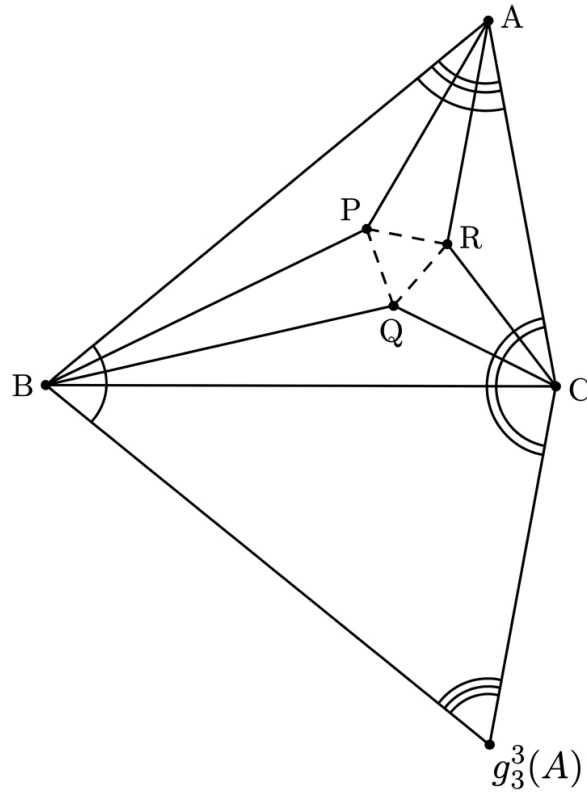


Figura 2.1.7: Pontos fixos de $g_1^3 g_2^3 g_3^3$

Elaborado pelo autor.

Assim, da proposição 2.1.1, podemos afirmar que, de $\omega^3 = 1$ e $\omega = e^{2\pi i/3} \neq 1$, temos $\omega^2 + \omega + 1 = 0$. A condição

$$P + \omega Q + \omega^2 R = 0 \iff P - R = -\omega \cdot (Q - R) \iff P - R = e^{-\pi/3 \cdot i} \cdot (Q - R)$$

diz que o vetor $P - R$ é obtido rotacionando $Q - R$ em $\pi/3$ radianos no sentido horário, ou seja, que ΔPQR é equilátero. ■

2.2 Erica Flapan

- **Perfil:** Professora no *Pomona College* (Califórnia) e uma das maiores especialistas em Teoria dos Nós e Topologia de baixa dimensão.
- **A Pioneria:** Flapan é pioneira na **Teoria Quiral de Grafos Espaciais**. Ela utiliza a topologia para entender a "mão" (quiralidade) de moléculas complexas e do DNA.

- **Obra Principal:** Autora do livro "*When Topology Meets Chemistry*" (2000), onde formaliza como propriedades topológicas impedem ou permitem certas transformações moleculares.
- **Educação:** É amplamente reconhecida por sua didática, tendo recebido o prêmio *Haimo Award* da MAA pela excelência no ensino de matemática.



2.3 Dorothy Buck

- **Perfil:** Professora de Biologia Matemática na *University of Bath* (Reino Unido) e especialista na interface entre topologia de baixa dimensão e DNA.
- **Contribuição:** Pioneira no uso do **Cálculo de Emaranhados (Tangles)** e do Grupo de Tranças para modelar a interação entre o DNA e enzimas.
- **Mecanismo:** Identificou o mecanismo topológico exato de ação das **Topoisomerases** e **Recombinases**, permitindo mapear como essas proteínas cortam e colam a fita genética.
- **Impacto:** Suas pesquisas fundamentam o entendimento de como antibióticos e quimioterápicos modernos interrompem o ciclo vital de bactérias e tumores através de "nós fatais".



2.4 Ações do Grupo de Tranças e a Topologia do DNA

Flapan [2000] Uma das conexões mais surpreendentes da matemática contemporânea ocorre na interface entre a topologia algébrica e a biologia molecular. Dentro do núcleo das células humanas, a molécula de DNA, que possui cerca de dois metros de comprimento, encontra-se altamente compactada. Durante os processos vitais de replicação e transcrição celular, as cadeias de DNA sofrem torções severas, gerando nós e emaranhados que bloqueariam a leitura genética se não fossem corrigidos. A biologia resolve esse problema por meio de enzimas chamadas topoisomerases, cuja função é cortar, girar e colar as vertentes de DNA. Para modelar e compreender matematicamente a ação dessas enzimas, utiliza-se a teoria de nós através das ações do Grupo de Tranças. Para fundamentar essa estrutura algébrica, estabelece-se a definição clássica do Grupo de Tranças proposta por Emil Artin, que serve como o objeto matemático que age sobre as configurações espaciais.

Definition 2.4.1. *O Grupo de Tranças com n cordas, denotado por B_n , é o grupo gerado macroscopicamente por $n - 1$ geradores $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}$. Cada gerador σ_i representa geometricamente a operação de cruzar a i -ésima corda por cima da $(i + 1)$ -ésima corda. Esses geradores satisfazem as chamadas relações de trança:*

$$\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i, \quad \text{se } |i - j| \geq 2 \quad (2.4.1)$$

$$\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}, \quad \text{para todo } i \quad (2.4.2)$$

A utilidade biológica dessa estrutura surge quando o Grupo de Tranças age sobre o espaço das configurações dos filamentos de DNA. Quando as duas fitas da molécula estão emparelhadas, elas podem ser vistas como cordas paralelas em uma trança geométrica. As enzimas topoisomerases atuam exatamente como elementos do grupo B_n , aplicando operações de cruzamento mecânico nas fitas.

Para correlacionar o estudo das tranças com nós fechados, aplica-se o Teorema de fechamento de Alexander, que garante que toda trança pode se transformar em um nó ou enlace quando suas extremidades são conectadas.

Proposition 2.4.1 (Teorema de Alexander). *Todo nó ou enlace no espaço tridimensional pode ser obtido por meio do fechamento geométrico de uma trança pertencente ao grupo B_n para algum valor de n .*

A ação de um elemento σ_i do Grupo de Tranças altera a topologia do DNA, transformando um nó em outro. Os biólogos moleculares utilizam os invariantes de nós, tais como o Polinômio de Jones, para identificar com precisão matemática qual tipo de nó foi formado antes e depois da atuação da enzima. Como o Polinômio de Jones é invariante sob os movimentos que preservam a integridade da corda, qualquer alteração no valor do polinômio indica que a enzima realizou um corte físico na estrutura molecular.

Ao analisar o valor do polinômio resultante da ação enzimática, os cientistas conseguem mapear o mecanismo exato de operação das topoisomerases, determinando se elas operam por mecanismos de cruzamento simples ou por inversões completas de nós. Esta aplicação das ações de grupos revolucionou a engenharia genética, permitindo o desenvolvimento de medicamentos quimioterápicos modernos que atuam inibindo especificamente a ação dessas enzimas em células cancerígenas, forçando o DNA tumoral a se emaranhar até colapsar, o que demonstra o impacto direto da álgebra abstrata na preservação da vida humana.

2.5 Aplicações Recentes: Computação e IA

- **Criptografia Pós-Quântica (2022):** W. Castryck e T. Decru utilizam ações de grupos sobre isogenias de curvas elípticas para criar protocolos de segurança resistentes a futuros computadores quânticos. [Castryck and Decru \[2023\]](#)
- **Aprendizado de Máquina Equivariante (2016-2023):** T. Cohen e M. Welling implementam ações de grupos em Redes Neurais (G-CNNs) para garantir que a IA reconheça padrões independentemente de rotações ou reflexões. [Cohen and Welling \[2016\]](#)
- **Robótica e Visão Computacional (2017-2024):** Timothy Barfoot utiliza ações de grupos de Lie ($SE(3)$) para permitir que veículos autônomos realizem localização e mapeamento (SLAM) simultâneos com alta precisão geométrica. [Barfoot \[2024\]](#)

Referências

- T. D. Barfoot. *State Estimation for Robotics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2nd edition, 2024.
- W. Castryck and T. Decru. An efficient key recovery attack on SIDH. In *Advances in Cryptology – EUROCRYPT 2023*, volume 14004 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 423–447, Cham, 2023. Springer.
- T. Cohen and M. Welling. Group equivariant convolutional networks. In *Proceedings of the 33rd International Conference on Machine Learning (ICML)*, volume 48 of *Proceedings of Machine Learning Research*, pages 2990–2999, New York, 2016. PMLR.
- A. Connes. A new proof of Morley’s theorem. *Publications Mathématiques de l’IHÉS*, 88: 43–46, 1998.
- E. Flapan. *When Topology Meets Chemistry: A Topological Look at Molecular Chirality*. Cambridge University Press, Cambridge, 2000.
- A. G. M. d. Morais. *O Teorema de Morley*. Universidade de Coimbra, Coimbra, 2013.
- S. SHIRALI. Napoleon’s theorem made simple - part 2. *At Right Angles*, 6(3):28–35, nov 2017.