Universidade Federal de Santa Catarina
Departamento de Matemática
Prof. Raphael da Hora

MTM 3110 - Cálculo 1
Prova 2
Tempo: 100 min

Nome: ______________________ Matrícula: ______________

INSTRUÇÕES

- Escreva o seu nome e número de matrícula na primeira página e em todas as páginas seguintes.
- Esta prova tem **4 páginas**. Certifique-se de ter todas elas.
- Mantenha-se em silêncio durante a prova. Para obter ajuda, levante a mão.
- Responda às perguntas nos espaços fornecidos após cada pergunta.
- A pontuação de cada questão aparece ao lado dela.
- Tenha em mente que a posse ou uso de telefones celulares ou quaisquer outros dispositivos eletrônicos não autorizados na sala de exames é estritamente proibido.
- Certifique-se de ler e assinar a **Declaração de Integridade Acadêmica** mostrada abaixo.

Problema	1	2	3	4	5	6	Total
Pontos Max	15	20	15	20	15	15	100
Pontos							

Declaração de Integridade Acadêmica

Ao assinar abaixo, comprometo-me que as respostas deste exame são de minha autoria, sem a ajuda de terceiros ou o uso de material ou informações não autorizados.

Assinatura: ....

15 1. Usando os dígitos de 1 a 6, no máximo uma vez cada, encontre valores para a e b de modo que função exponencial de base e da forma

$$f(x) = e^{ax-b}$$

tenha derivada em $x = 3$ igual a 2, $f'(3) = 2$.

Usando a regra da cadeia, a derivada de f é

$$f'(x) = ae^{ax-b} \Rightarrow f'(3) = ae^{3a-b} = 2.$$

Como os valores de a e b são inteiros de 1 a 6, temos que ter $3a - b = 0$, logo $b = 3a$. Portanto,

$$ae^0 = 2 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow b = 3 \cdot 2 = 6.$$

20 2. Você está envolvido em um projeto de pesquisa que envolve trabalhar com uma espécie de animal de laboratório. Se $W(t)$ é o peso (em quilogramas) desse animal t semanas após o nascimento, então o crescimento de um animal saudável pode ser modelado pela equação diferencial:

$$W'(t) = \frac{10}{W(t)} \quad \text{ou} \quad \frac{dW}{dt} = \frac{10}{W}.$$

Suponha que você seja responsável por um animal que pesa 5 kg uma semana após o nascimento. O que o modelo nos diz sobre a taxa de crescimento do animal quando ele tem uma semana de idade? Use a reta tangente no ponto $(1, 5)$ para fazer uma estimativa do peso do animal 8 dias após o nascimento.

Passada uma semana, o peso do animal é $W(1) = 5$, logo a sua taxa de crescimento é

$$W'(1) = \frac{10}{W(1)} = \frac{10}{5} = 2,$$

i.e., ele está crescendo a uma taxa de 2 kg por semana.

A reta tangente que passa pelo ponto $(1, W(1)) = (1, 5)$ tem inclinação igual a $W'(1) = 2$, logo sua equação é dada por

$$\frac{y-5}{t-1} = 2 \Rightarrow y - 5 = 2(t-1) \Rightarrow y = 2t + 3.$$

Portanto, se aproximamos $W(t)$ pela expressão $2t + 3$, se $t = 8/7$ semanas, então

$$W\left(\frac{8}{7}\right) \approx 2 \cdot \frac{8}{7} + 3 = \frac{16+21}{7} = \frac{37}{7}.$$

$\boxed{15}$ 3. Suponha que f seja uma função duas vezes diferenciável que satisfaça

$$f(x^2) = f(x) + x^2.$$

Encontre $f'(1)$ e $f''(1)$.

Temos que a derivada da expressão dada acima é

$$\frac{d}{dx}\left(f(x^2)\right) = \frac{d}{dx}\left(f(x) + x^2\right)$$

$$2xf'(x^2) = f'(x) + 2x \Rightarrow 2 \cdot 1 \cdot f(1^2) = f'(1) + 2 \cdot 1 \Rightarrow 2f'(1) = f'(1) + 2 \Rightarrow f'(1) = 2.$$

Agora, tomando novamente a derivada da expressão $2xf'(x^2) = f'(x) + 2x$, temos

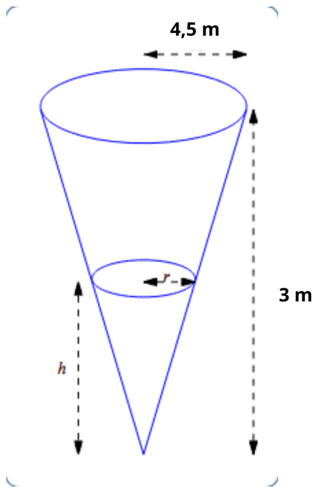
$$\frac{d}{dx}\left(2xf'(x^2)\right) = \frac{d}{dx}\left(f'(x) + 2x\right)$$

$$\Rightarrow 2f'(x^2) + 2xf''(x^2) = f''(x) + 2 \Rightarrow 2f'(1^2) + 2 \cdot 1 \cdot f''(1^2) = f''(1) + 2$$

$$2f'(1) + 2f''(1) = f''(1) + 2 \Rightarrow f''(1) = 2 - 2f'(1) = 2 - 2 \cdot 2 = -2.$$

$\boxed{20}$ 4. Um tanque de água tem a forma de um cone reto com o vértice para baixo. Sua altura é de 3 metros e o raio da base é de 4,5 metros. A água vaza do fundo a uma taxa constante de 0,03 metros cúbicos por segundo. Água é despejada no tanque a uma taxa constante de c metros cúbicos por segundo. Calcule c de modo que o nível da água suba a uma taxa de 1,2 metros por segundo no instante em que a água estiver com 60 centímetros de profundidade.

Primeiro, veja que o volume do cone de raio r e altura h é dado por $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$. No caso desse problema, existe uma relação entre r e h, que é dada pela semelhança de dois triângulos retângulos cujos catetos medem $3, 4,5$ e h, r, respectivamente. Logo $\frac{r}{h} = \frac{4,5}{3} = 1,5$, logo $r = 1,5h$ e $V = \frac{1}{3}\pi(1,5)^2 h^3$.



Veja a figura ao lado e a animação disponível no LINK.

Temos então que

$$\frac{d}{dt}(V) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{3}\pi(1,5)^2 h^3\right)$$

$$\Rightarrow \frac{dV}{dt} = \frac{1}{3}\pi(1,5)^2 \cdot 3h^2\frac{dh}{dt} = \pi(1,5h)^2\frac{dh}{dt}$$

Agora usando que se $h = 0,6$, temos $\frac{dh}{dt} = 1,2$ e $\frac{dV}{dt} = c - 0,03$, podemos resolver a equação em c e econtrar $c = 0,972\pi + 0.03 \approx 3,083628$.

$\boxed{15}$ 5. As companhias aéreas aceitam uma caixa se o comprimento + largura + altura = $c + l + h < 158cm$. Se h estiver fixo, mostre que o volume máximo $(158 - l - h)lh$ é $V = h(79 - h/2)^2$. Para demonstrar isso, mostre que o produto $l(158 - l - h)$ é máximo quando $l = (158 - h)/2$. Quais são as medidas da caixa com o maior volume?

Veja que de fato, para que o produto $g(l) = l(158 - l - h)$ seja máximo, temos que $g'(l) = 0$, ou seja $158 - l - h + l(-1) = 158 - h - 2l = 0$, logo $2l = 158 - h$.

Finalmente, para compreender bem o problema de maximizar este volume $V(h) = h(79 - h/2)^2$, veja a animação LINK Problema.

Temos que resolver

$$V'(h) = \left(79 - \frac{h}{2}\right)^2 - h\left(79 - \frac{h}{2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \left(79 - \frac{h}{2}\right)\left(79 - \frac{h}{2} - h\right) = \left(79 - \frac{h}{2}\right)\left(79 - \frac{3h}{2}\right) = 0,$$

logo $h = 158$ ou $h = \dfrac{158}{3}$. Claramente, $h = 158$ não é um máximo, na realidade é um mínimo, logo a resposta é $h = \dfrac{158}{3}$.

$\boxed{15}$ 6. Suponha que dois carros comecem uma corrida ao mesmo tempo e terminem ao mesmo tempo. Prove que em algum momento durante a corrida, suas velocidades foram iguais.

No tempo t, sejam $s_A(t)$ a posição do carro A e $s_B(t)$ a posição do carro B.

Considere $s(t) = s_A(t) - s_B(t)$. Note que $s(0) = 0$ e, se T é o tempo da corrida, $s(T) = 0$, pois os carros começaram e terminaram a corrida nas mesmas posições. Segue do Teorema do Valor Médio ou Teorema de Rolle que existe um tempo $0 < t_0 < T$ tal que

$$s'(t_0) = 0,$$

mas isso implica que $s'_A(t_0) = s'_B(t_0)$, ou seja, as suas velocidades no tempo t_0 eram idênticas.