Universidade Federal de Santa Catarina
Departamento de Matemática
Prof. Raphael da Hora

MTM 3110 - Cálculo 1
Prova 1
Tempo: 100 min

Nome: ______________________________ Matrícula: ______________

INSTRUÇÕES

- Escreva o seu nome e número de matrícula na primeira página e em todas as páginas seguintes.
- Esta prova tem **5 páginas**. Certifique-se de ter todas elas.
- Mantenha-se em silêncio durante a prova. Para obter ajuda, levante a mão.
- Responda às perguntas nos espaços fornecidos após cada pergunta.
- A pontuação de cada questão aparece ao lado dela.
- Tenha em mente que a posse ou uso de telefones celulares ou quaisquer outros dispositivos eletrônicos não autorizados na sala de exames é estritamente proibido.
- Certifique-se de ler e assinar a **Declaração de Integridade Acadêmica** mostrada abaixo.

Problema	1	2	3	4	5	6	Total
Pontos Max	15	15	15	20	20	15	100
Pontos							

Declaração de Integridade Acadêmica

Ao assinar abaixo, comprometo-me que as respostas deste exame são de minha autoria, sem a ajuda de terceiros ou o uso de material ou informações não autorizados.

Assinatura: ....

$\boxed{15}$ 1. Usando os dígitos de 0 a 9 no máximo uma vez cada, encontre os valores de a, b e c, números inteiros de zero a nove, para fazer a igualdade abaixo verdadeira.

$$\lim_{x\to a} \frac{x^2 - b}{x - a} = c$$

Primeiro veja que para que o limite acima tenha alguma chance existir, é necessário que $x^2 - b$ se aproxime de zero se $x \to a$, ou seja, $a^2 - b = 0$, logo $b = a^2$. De fato, caso contrário, se $x \to a$, teríamos $x^2 - b$ se aproximando de um valor diferente de zero e $x - a$ se aproximando de zero, o que implicaria que a expressão $\left|\frac{x^2 - b}{x - a}\right|$ estaria se aproximando de ∞.

Portanto $b = a^2$. Neste caso, temos

$$\frac{x^2 - b}{x - a} = \frac{x^2 - a^2}{x - a} = \frac{(x-a)(x+a)}{x - a} = x + a,$$

logo $\frac{x^2 - a^2}{x - a} \to a + a = 2a$, se $x \to a$. Logo $c = 2a$.

Como a, b e c são diferentes dígitos de 0 a 9, temos $a = 3$, $b = 9$ e $c = 6$.

$\boxed{15}$ 2. Um avião sobrevoa Florianópolis a caminho de Buenos Aires às 13h. A velocidade do avião é de 500 mph, e pelas próximas quatro horas o avião voa a uma velocidade constante de 500 mph. O avião voa à mesma altitude durante todo o tempo. Esboce um gráfico da velocidade do avião em função do tempo. Também expresse a distância percorrida, d, como uma função de t. Ou seja, encontre $d(t)$. Agora suponha que às 17h ele entre na região de controle aéreo de um aeroporto e comece a desacelerar. Ele gradualmente diminui a velocidade para 300 mph até às 17h30. Qual é a velocidade no tempo t depois das 17h? E quanto à distância?

Note que se o tempo é medido em horas e $t = 0$ corresponde ao horário de partida, 13h, se $0 \leq t \leq 4$, então a velocidade é $v(t) = 500$. Se $t > 4$, assumindo que a velocidade decresce de forma linear, passados 30 min (meia hora) depois das 17h, a velocidade diminuiu de 500 para 300 mph, ou seja, está diminuindo a uma taxa de 400 mph por hora. Logo, se $t \geq 4$, o gráfico da velocidade é um segmento de reta que passa pelos pontos $(4, 500)$ e $(9/2, 300)$, com inclinação -400, i.e., $v(t) = -400t + 2100$. CLIQUE AQUI para ver uma animação do gráfico dessa função. Movendo o ponto azul $(t, v(t))$ nesta animação, vemos que a distância é a área delimitada pelo gráfico de $v(t)$ com $0 \leq t \leq 21/4$ e o eixo-X. Ela é dada pela área do retângulo com lados medindo t e 500, se $0 \leq t \leq 4$, já se $4 < t \leq 21/4$, a distância é dada pela soma da área do retângulo com lados medindo 4 e 500 e da área do trapézio com bases medindo $v(t)$ (base menor) e 500 (base maior) e altura igual a $t - 4$. Logo

$$d(t) = \begin{cases} 500t, & 0 \leq t \leq 4 \\ (-200t + 1300)(t - 4) + 2000, & 4 < t \leq 21/4 \end{cases}$$

Lembre-se que a área do trapézio com bases medindo b (base menor) e B (base maior), e altura h é $\frac{(b + B)h}{2}$.

15 3. Considere a seguinte função:

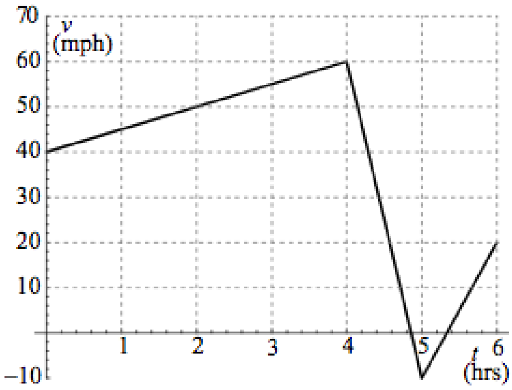
$$f(x) = \begin{cases} x - 10, & \text{se } x > 100 \\ f\left(f(x+11)\right), & \text{se } x \leq 100 \end{cases}$$

Aqui $f\left(f(x+11)\right) = (f \circ f)(x+11)$. **Calcule** $f(100)$.

Temos que $f(100) = f(f(100+11)) = f(f(111))$. Agora $f(111) = 111 - 10 = 101$. Logo

$$f(100) = f(f(111)) = f(101) = 101 - 10 = 91.$$

20 4. O gráfico abaixo fornece um modelo para a velocidade de um carro dirigindo ao longo de uma rodovia reta. Encontre uma fórmula para a distância em termos do tempo.



A função acima é dada por $v(t) = \begin{cases} 5t + 40, & 0 \leq 0 \leq 4 \\ 340 - 70t, & 4 < t \leq 5 \\ 30t - 160, & 5 < t \leq 6 \end{cases}$

A distância é dada pela área delimitada pelo gráfico de $v(t)$ e o eixo-X, sendo que a área acima do eixo-X é positiva e a área abaixo do eixo-X é negativa, pois a velocidade negativa é equivalente a voltar, ou seja, a distância com relação ao ponto de partida diminui e não aumenta. CLIQUE AQUI para ver uma animação.

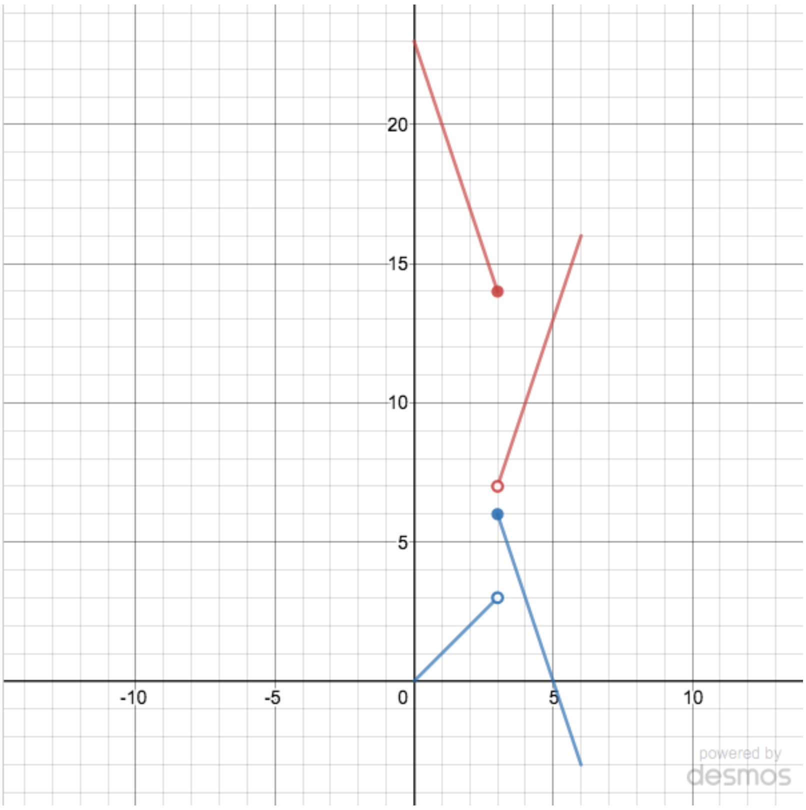
Portanto, se $0 \leq t < 4$, a distância é dada pela área do trapézio com medidas de base 40 e $v(t)$, e altura t, logo, $d(t) = \dfrac{(40 + v(t))t}{2}$. Agora, se $4 \leq t < 34/7$, a área é dada pela área do trapézio de bases $40, 60$ e altura 4 mais a área do trapézio de bases $v(t), 60$ e altura $t - 4$, i.e., $d(t) = \dfrac{(40+60)4}{2} + \dfrac{(v(t)+60)(t-4)}{2}$. Note que este último número é igual a área do trapézio de bases $40, 60$ e altura 4 mais a área do triângulo de base $34/7 - 4$ e altura 60 menos a área do triângulo de base $34/7 - t$ e altura $v(t)$. Quando $t = 34/7$, $d(34/7) = \dfrac{(40+60)4}{2} + \dfrac{(34/7 - 4)60}{2} = 1580/7$. Se $34/7 < t \leq 5$, temos que a distância é dada por $1580/7$ menos a área do triângulo de base $t - 34/7$ e altura $-v(t)$, i.e., $d(t) = \dfrac{1580}{7} + \dfrac{(t - 34/7)v(t)}{2}$. Se $t = 5$, $d(5) = \dfrac{1580}{7} - \dfrac{(5 - 34/7)10}{2} = \dfrac{1575}{7}$. Se $5 < t \leq 16/3$, a distância é dada por $1575/7$ menos a área do trapézio de bases $10, -v(t)$ e altura $t - 5$, i.e, $d(t) = \dfrac{1575}{7} - \dfrac{(10 - v(t))(t-5)}{2}$. Se $t = 16/3$, $d(16/3) = \dfrac{1575}{7} - \dfrac{(16/3 - 5)10}{2} = \dfrac{670}{3}$.

Finalmente, se $16/3 < t \leq 6$, a distância será dada por $\dfrac{670}{3}$ mais a área do triângulo de base $t - 16/3$ e altura $v(t)$, i.e., $d(t) = \dfrac{670}{3} + \dfrac{(t-16/3)v(t)}{2}$.

Logo

$$d(t) = \begin{cases} \dfrac{(5t+80)t}{2}, & 0 \leq t < 4 \\ 200 + \dfrac{(400-7t)(t-4)}{2}, & 4 \leq t < \dfrac{34}{7} \\ \dfrac{1580}{7} + \dfrac{(t-34/7)(340-70t)}{2}, & \dfrac{34}{7} \leq t < 5 \\ \dfrac{1575}{7} - \dfrac{(170-30t)(t-5)}{2}, & 5 \leq t < \dfrac{16}{3} \\ \dfrac{670}{3} + \dfrac{(t-16/3)(30t-160)}{2}, & \dfrac{16}{3} \leq t \leq 6 \end{cases}$$

$\boxed{20}$ 5. Sejam $f, g : [0,6] \to \mathbb{R}$ funções cujos gráficos estão na figura abaixo, f em azul e g em vermelho. Calcule $\lim\limits_{x \to 3} f(x)g(x)$.



Temos que

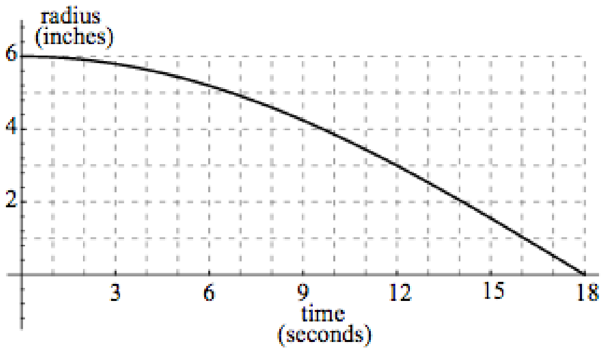
$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 3 \\ -3x+15, & 3 \leq x \leq 6 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} -3x+23, & 0 \leq x \leq 3 \\ 3x-2, & 3 < x \leq 6 \end{cases}$$

Logo

$$f(x)g(x) = \begin{cases} x(-3x+23), & 0 \leq x < 3 \\ 6 \cdot 14, & x = 3 \\ (-3x+15)(3x-2), & 3 < x \leq 6 \end{cases}$$

Note que se x está próximo de 3 e é menor que 3, $f(x)g(x)$ se aproxima de $(3)((-3)(3)+23) = 3 \cdot 14 = 42$. Já se x está próximo de 3 e é maior que 3, $f(x)g(x)$ se aproxima de $((-3)(3)+15)(3(3)-2) = 6 \cdot 7 = 42$. Portanto o limite $\lim_{x\to 3} f(x)g(x)$ existe e é igual a 42. O valor de $f(x)g(x)$ é irrelevante, pois queremos saber para onde vai $f(x)g(x)$ quando x está próximo de 3.

$\boxed{15}$ 6. Um balão esférico está vazando. Abaixo está um gráfico do raio r (em polegadas) como função do tempo t (segundos). Qual é a velocidade com que o raio está mudando quando $t = 15$?



Não há como calcular de forma precisa a velocidade com que o raio está mudando quando $t = 15$, pois não sabemos a expressão da função do raio r com relação ao tempo t, $r(t)$. No entanto, pelo gráfico podemos aproximar a curva $y = r(t)$ por uma reta nas proximidades do ponto $t = 15$ e calcular a inclinação desta reta, pois a velocidade no tempo t é igual a inclinação da curva no ponto $t = 15$, que corresponde à inclinação da reta tangente. Ou seja, podemos aproximar a reta tangente pela reta que passa, por exemplo, pelos pontos $(14, 2)$ e $(16, 1)$, que tem inclinação igual a $\dfrac{1-2}{16-14} = -\dfrac{1}{2}$.

Quanto mais próximos de $t = 15$ são os pontos que escolhemos, melhor será a nossa aproximação.