

## Um episódio de sala de aula

Antes de começar sua aula da quarta série, na frente de todos os alunos, a professora — a Sra. Giroux — pediu a Marc que contasse à classe algo sobre seu recente aniversário. Marc mencionou alguns dos presentes que recebeu. Entre os presentes, havia um cofrinho do qual Marc parecia gostar particularmente.

Aconteceu que a professora e sua turma de alunos da quarta série com idades entre nove e dez anos logo lidariam com a generalização dos padrões algébricos. Aproveitando o dom de Marc, o professor inventou uma história por meio da qual os alunos poderiam começar a investigar uma abordagem covariacional para produzir uma fórmula (não necessariamente com simbolismo alfanumérico). Em termos de currículo, a fórmula deve permitir que os alunos calculem o valor dos períodos remotos em uma sequência simples. Alguns dias depois, os alunos estavam trabalhando em pequenos grupos em um problema baseado na seguinte história:

*Em seu aniversário, Marc recebe um cofrinho com um dólar. Toda semana ela economiza dois dólares. No final da primeira semana você tem três dólares, no final da segunda você tem cinco dólares e assim por diante.*

O professor deu aos alunos fichas de bingo de duas cores (azul e vermelho) e copos plásticos numerados para representar a semana 1, semana 2, etc., e convidou os alunos a modelar o processo de poupança até a semana 5. Em seguida, com base no modelo, o professor convidou os alunos a encontrar a quantidade de dinheiro economizada no final das semanas 10, 15 e 25.

Este é um trecho da discussão de um grupo de três alunos: Albert à direita (parcialmente visível nas imagens abaixo), Krysta no centro e Manuel à esquerda.

- 14 Krysta: Portanto, devemos fazer... Isso (veja a imagem à esquerda da Figura 1) vezes duas vezes. Então, 11...
- 15 Albert: 11 mais 11... 22.
- 16 Krysta: 22.
- 17 Albert:  $(Ri)$
- 18 Krysta: No final de... bem, no final...
- 19 Albert: Bem, espere... Não. Seria 11 mais 10 porque...
- 20 Krysta: *(Marca a semana 5)* 5.

21 Albert: (Aponta para a ficha de bingo azul) Sempre começamos com o... [guia azul] (veja a imagem à direita na Figura 1).



Figura 1. Esquerda: Krysta aponta para as fichas de bingo na frente da semana 5; direita: Albert aponta para a ficha de bingo azul

Como podemos ver, para responder à pergunta sobre a semana 10, os alunos recorrem à estratégia de dobrar. Eles calculam a quantidade de dólares economizados até a semana 5, dobram e passam a subtrair um dólar desse valor, que corresponde à ficha de bingo azul, já que sempre há uma e apenas uma ficha de bingo azul em uma semana (ver Figura 2). A razão não é perfeitamente articulada por Albert nas linhas 19 e 21, mas seu gesto claro de apontar ajuda a preencher o vazio verbal da explicação pretendida.

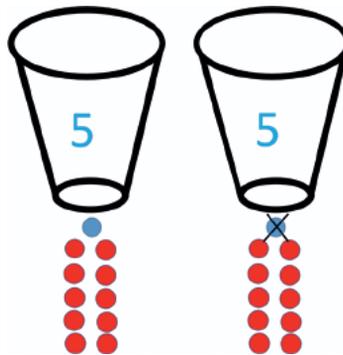


Figura 2. A estratégia de dobrar

A estratégia de duplicação pode ser aplicada a outros casos, como observaram os alunos. Assim, para determinar a quantidade de dinheiro economizada no final, por exemplo, da semana 25, observamos que alguns grupos começam na semana 5; Ao dobrar, eles obtêm a quantidade de dinheiro economizada na semana 10. Eles dobram novamente e adicionam a quantidade da semana 5, não esquecendo de remover os ladrilhos azuis

extras que foram adicionados no processo. A estratégia funciona bem, mas é complicado determinar a quantidade de economia em semanas "remotas", como a semana 78 ou a semana 103.

Mas vamos continuar com o exemplo do cofrinho. Quando a professora foi ver o trabalho de Krysta e seus colegas, ela percebeu que os alunos estavam recorrendo à estratégia de duplicação. A discussão foi a seguinte:

- 22 Mestre: O que eu acho interessante aqui é que [em seu modelo] eles têm fichas de bingo de duas cores. O que isso significa?
- 23 Krysta: Porque o azul era o que ele [Marc] já tinha.
- 24 Manuel: Sim, porque isso [a história do problema] diz que o cofrinho tinha um dólar.
- 25 Albert: O cofrinho tinha um dólar, então esses (*ele aponta em sequência para todas as fichas de bingo azuis da semana 1 a 5*) são todos os dólares que ele já tinha (*ele agora aponta para as fichas de bingo vermelhas da semana 1 a 5*) adicionamos 2, 4, 6, 8, 10.
- 26 Professor: Bom, bom. O que aconteceria se fosse a semana 10?
- 27 Albert: Bem (*aponta para a semana 5*), adicionamos tudo isso de volta (*faz um gesto abrangente; veja as imagens 1 e 2 da Figura 3*), pois sabemos que  $5 + 5 = 10$ , então...
- 28 Krysta: (*interrompe*) Mais... Adicionar... Adicionamos tudo isso (*aponte para as fichas de bingo vermelhas da semana 5; Veja a Figura 3, imagem 3*), não a azul (*aponta para a ficha de bingo azul...*).
- 29 Professor: (*Tenta apontar para os alunos a estrutura covariacional*) O que você observa na semana 5 (*mostra a taça correspondente à semana 5*) e (*aponta para as fichas vermelhas de bingo; Veja a Figura 3 na Figura 4*) O número de fichas de bingo? (*executa as mesmas ações*) A quarta semana e o número de fichas de bingo?
- 30 Albert: É sempre duas vezes...
- 31 Professor: (*Repetido*) É sempre duas vezes.
- 32 Krysta: É o dobro de... Não! (*olha atentamente para os artefatos por um tempo*) Estou confuso!
- 33 Albert: Sim! É o dobro, olhe! (*conte as peças vermelhas*)  $1 + 1, 2; 2 + 2, 4; 3 + 3,$

6;  $4 + 4$ .

34 Krysta: (*Interrompe*) 8.

35 Albert: (*Ao mesmo tempo*) 8. 36

Krysta:  $5 + 5$ , 10.

37 Albert: (*Ponto para as fichas de bingo da semana 5*)  $5 + 5$ , 10.

38 Krysta: Súper. É duas vezes por semana...

39 Mestre: Então, se os vermelhos são o dobro [do número da semana], o que dizer da ficha de bingo [azul]? (*aponta para a ficha de bingo azul da semana 5*)

40 Krysta: Mais 1.

Da linha 22 à linha 28, os alunos explicam sua estratégia ao professor. A estratégia não é identificada com um rótulo (como a estratégia de duplicação ou outra), mas é explicada em ação, por meio de palavras e gestos.

Na linha 29, algo importante acontece. De fato, na linha 29, o professor tenta introduzir o que parece ser uma nova abordagem para perceber as coisas. Ele diz: "O que você observa na semana 5 e o número de fichas de bingo? A quarta semana e o número de fichas de bingo?" No final da passagem, os alunos parecem começar a notar uma relação covariacional entre o número da semana e as fichas vermelhas e azuis

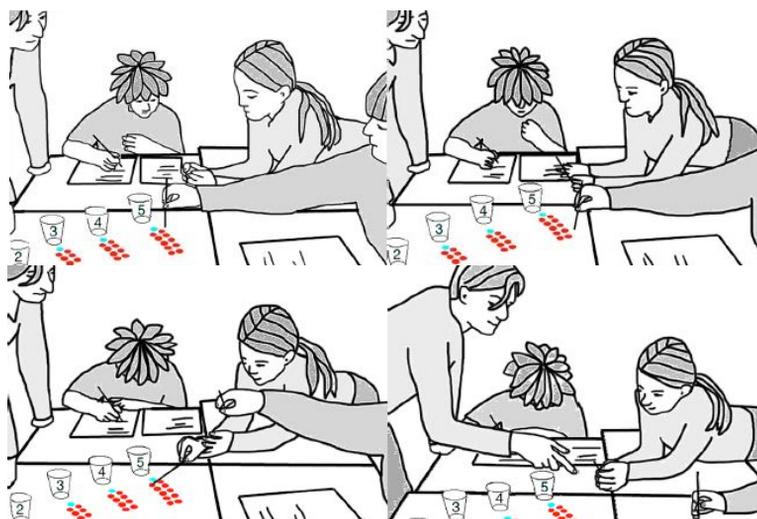


Figura 3. Os alunos e o professor discutem a estratégia

Após uma discussão com o professor, os alunos criaram uma fórmula verbal para calcular as fichas de bingo na semana 5. A fórmula era "5 mais 5 mais 1". No capítulo 1, foi apresentada a primeira parte dessa discussão entre o professor e os alunos. Após essa discussão, o professor convidou os alunos a anotar os cálculos que precisam ser feitos para determinar as economias para a semana 5 e a semana 10. O professor esperava uma fórmula como  $5 + 5 + 1$  e  $10 + 10 + 1$ , respectivamente. No entanto, os alunos não produziram nada disso. Eles se concentraram nas tentativas de combinar a estratégia de duplicação (ver linhas 22 a 28 do Capítulo 1) e a consciência emergente de uma relação entre variáveis (ver linhas 29 a 40 do Capítulo 1).<sup>1</sup> O trecho a seguir dá uma ideia da conversa com o professor:

- 47 Professor: Que fórmula podemos escrever?
- 48 Albert: (*Pensa hesitante*) Hmmm ...
- 49 Professor: Que tipo de cálculos podem ser feitos?
- 50 Albert: Por 2 ou mais, por 2.
- 51 Professor: Semana 5... (*pega a taça da semana 5 e mostra a Albert*)
- 52 Albert: Por 2, não, seria por 4. Cinco por 4.
- 53 Professor: Semana 5...
- 54 Albert: Para 4 mais 1.
- 55 Professor: Por que para 4?

---

A atividade levou a uma consciência de duas maneiras de proceder: uma é a abordagem de Albert, a outra é a forma algébrica esperada à qual o professor é endereçado. Essas formas de proceder levam a algo que no materialismo dialético é chamado de *contradição*. A contradição não é considerada uma falha, uma falha lógica ou uma falha do design didático. Pelo contrário, a contradição é vista como o motor que impulsiona a atividade e a mantém em movimento. A contradição faz parte do movimento do conhecimento. Agora vamos olhar para o resto da discussão.

Após uma troca com os alunos, a professora pegou o quinto copo

---

<sup>1</sup> O método de duplicação baseia-se no pensamento proporcional: funciona como uma relação entre quatro magnitudes; é um método aritmético. O método da variável é um passo em direção ao pensamento algébrico. É muito diferente do proporcional, que é mais "estático" (nota nesta edição).

(imagem 1 da Figura 19) e perguntou a Albert<sup>2</sup>:

- 67 Professor: O que você fez aqui? 5... (*salienta a fichas de jogos de bingo vermelho;*  
veja a Figura 19, Figura 2) Por quê...?
- 68 Albert: ... 2
- 69 Professor: (*Apona a símbolo bingo azul;* ver imagem 3) Mais?
- 70 Albert: 1

Em seguida, a professora pegou a xícara da semana 5 (imagem 4 da figura 19), moveu-a para a esquerda para um local onde se esperaria que a xícara da semana 10 fosse como se a sequência tivesse sido materialmente prolongada e perguntou:

- 71 Mestre: O que você faria com a semana 10, se a semana 10 estivesse aqui? (ver imagem 4)

Albert fez um esforço para responder, mas não alcançou a fórmula esperada. Como sugere a análise da gravação, neste momento, tanto o professor quanto o aluno estavam muito tensos (veja, por exemplo, a postura corporal de Albert na figura 5). O professor começa de novo:

- 77 Mestre: (*Pega o cálice da semana 5 novamente e fala sobre a semana*  
————— 5) O que você fez aqui? (*imagem 6; o professor está parcialmente visível*)
- 78 Albert: (*Ele respira fundo e bate a caneta na mesa enquanto o professor segura a xícara para a semana 5; veja a imagem 7*) Ok.
- 79 Professor: (*Ainda segurando o copo, ele pronuncia em voz baixa*) 5...
- 80 Albert: (*Em sincronia com o gesto do professor apontando ao lado das fichas de bingo vermelhas; veja a figura 8*) Para 2...
- 81 Krysta: (*O que está seguindo a discussão*) Por 2 iguais...

---

<sup>2</sup> Observe que o primeiro vidro à esquerda não aparece na imagem e que Albert está parcialmente visível.

- 82 Professor: (*Agora aponta para a ficha de bingo azul; veja a imagem 9*)  
Mais 1.
- 83 Albert: (*Quase ao mesmo tempo*) Mais 1.
- 84 Professor: (*Agora aponte para um espaço vazio onde seria a semana 10; Veja a Figura 10*) 10?
- 85 Albert: (*O professor silenciosamente aponta para onde as fichas de bingo vermelhas deveriam estar; veja a figura 11*) Por 2.
- 86 Krysta: (*Ao mesmo tempo*) Por 2.
- 87 Professor: (*Silenciosamente aponta para onde a ficha de bingo azul deveria estar; veja a imagem 12*)
- 88 Krysta: Mais 1.
- 89 Albert: (*Olhe para o professor*) Menos 1? Por 2 menos 1? Mais 1?

Apesar do resultado inconclusivo da interação nas linhas 47 a 55 do diálogo, na linha 71, o professor começa a tentar envolver Albert. Na linha 77, ela pergunta: "O que você fez aqui?" e então, na linha 79, ela faz um convite com a palavra: "cinco", que ela pronuncia enquanto segura o quinto copo. Albert aceita o convite do professor com todo o corpo: respira fundo e bate na mesa com a caneta (imagem 7). A maneira como a professora formula suas perguntas encoraja Albert: ela implica que Albert pode resolver o problema, mas que ele não prestou atenção suficiente à configuração das fichas de bingo; Ele não olhou para o que se espera que veja, ou seja, a estrutura matemática do ponto de vista algébrico.

Está implícito que o professor conhece essa estrutura algébrica, mas não basta conhecê-la. Não é suficiente porque o professor não pode injetar essa estrutura na consciência do aluno. Para que o conhecimento algébrico apareça, tanto o aluno quanto o professor precisam trabalhar juntos. O professor e o aluno devem participar de um processo de objetificação. Esse processo começará a ocorrer quando o conhecimento buscado deixar o reino da atenção latente, deixar de ser um potencial e suas partes e conexões começarem a cruzar a fronteira da atenção explícita e começarem a aparecer refratadas na consciência de Albert. Mas Albert e o professor ainda não chegaram lá.

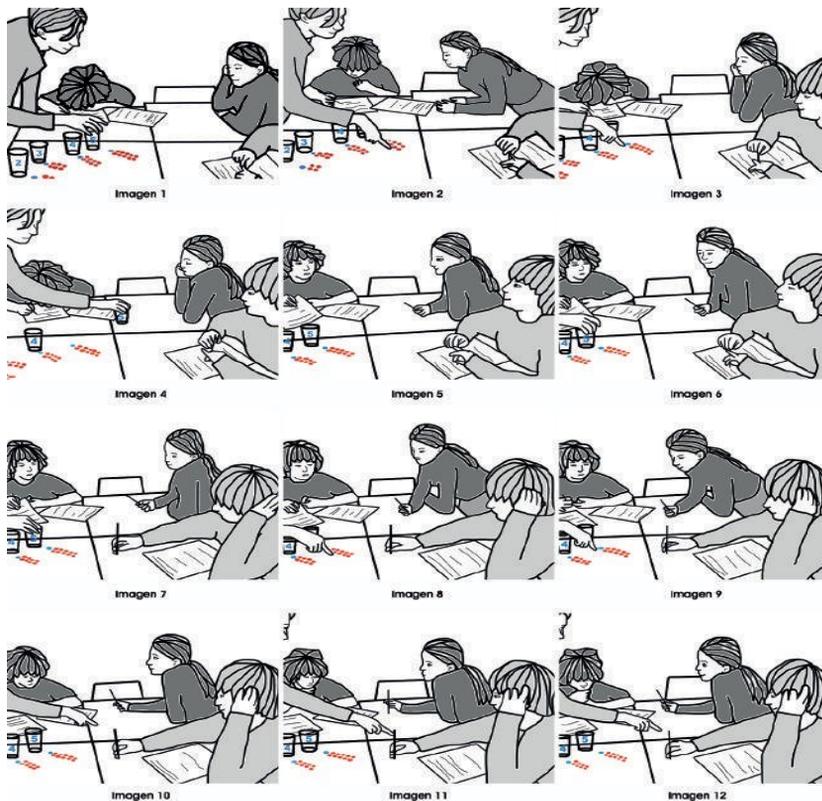


Figura 19. O professor e Albert se envolvem em um esforço conjunto

Sem falar, na linha 80, a professora move a mão para apontar para as fichas vermelhas de bingo (ver imagem 8). Albert diz: "Às 2". Em seguida, o professor aponta para a ficha de bingo azul (imagem 9) e diz, quase ao mesmo tempo que Albert, "Mais 1". Em seguida, ele move a mão até o ponto em que o modelo da semana 10 deveria estar (imagem 10) e diz baixinho: "10?" Então, sem falar, o professor aponta para a posição imaginária das fichas de bingo vermelhas (imagem 11), enquanto Albert olha para o gesto dêitico e diz: "Às 2" (ver imagem 11).

Essa energia que envolve o professor e Albert, energia que é sensível e sensual, material e ideacional, discursiva e gestual, e que é um fluxo que carrega intenções e motivos parcialmente expressos e parcialmente compreendidos, é a atividade ou o que chamamos de *trabalho conjunto*. Envolta nessa energia, a professora silenciosamente move a mão para apontar com um gesto dêitico para a posição imaginária da ficha de bingo azul (ver imagem 12) e Albert diz: "Menos 1? Por 2 menos 1? Mais 1?" Neste ponto da atividade conjunta de ensino-aprendizagem / energia / trabalho, o encontro

de Albert com aspectos do conhecimento algébrico está ocorrendo. Albert ainda precisa perceber melhor os diferentes componentes e conexões do conhecimento; ele tem que perceber melhor cada um dos elementos da fórmula matemática. Não vai demorar muito. Poucos minutos depois, o professor organizou uma discussão geral.

Ele convidou vários alunos para apresentar suas ideias. A certa altura, ele pergunta

a Albert para explicar os cálculos para determinar a quantidade de dinheiro no final da semana 2. O professor não tinha certeza se Albert conhecia mais todos os elementos da fórmula. Talvez Albert também não tivesse certeza. O convite foi certamente arriscado. Mas Albert aceitou o convite e respondeu com algumas dúvidas:

- 191 Albert: *(Referindo-se à segunda semana)* é 2; A segunda semana É duas vezes porque 2 eh, dólares foram adicionados ...
- 192 Professor: Nada mau...
- 193 Albert: Então, 2 vezes 2 é igual a 4, que são as fichas de bingo, os dólares vermelhos.
- 194 Professor: Ok *(enquanto Albert está falando, o professor identifica os desenhos correspondentes das fichas de bingo no tabuleiro; Veja a Figura 20, Figura 1).*
- 195 Albert: 4 é o dobro do [número da] semana.
- 196 Professor: *(Repita, para destacar a ideia)* Duas vezes por semana!
- 197 Albert: E 1, mais 1, tipo...
- 198 Mestre: *(Para entender a soma de Albert)* E você vai acrescentar... *(aponta para o sorteio correspondente à ficha de bingo azul no tabuleiro; veja a Figura 2).*
- 199 Albert: Sim, mais um, o que perfaz 5.
- 200 Professor: Nada mau... Faça o mesmo com a semana 4. A mesma ideia, 4.
- 201 Albert: 4 por 2...
- 202 Professor: 4 por 2 porque é duas vezes...
- 203 Albert: Mais 1, 4 vezes 2 mais 1 é igual a 9.

Ao longo da discussão geral, há uma coordenação entre o que Albert diz e os gestos do professor no quadro-negro; os gestos são direcionados a Albert e a toda a classe, para dar um sentido visual ao que Albert diz (ver Figura 20).

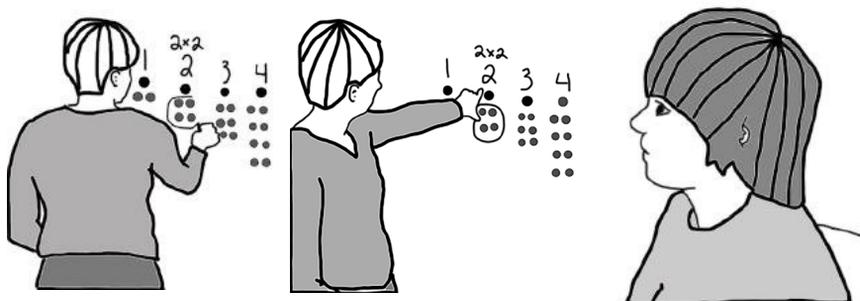


Figura 20. Coordenação de gestos no quadro branco com o que Albert diz de sua mesa

Na linha 195, Albert verbaliza a relação entre as variáveis. Na linha 196, o professor aproveita para sublinhar a ideia de Albert. A linha 197 mostra a adição que não estava clara para Albert na linha 89. Na linha 198, o professor ajuda a completar o significado da adição. As linhas 200 a 203 contêm as pedras da semana 4.

A lição terminou com esta discussão geral. No dia seguinte, os alunos trabalharam em um problema isomórfico. O personagem da história (aquele que economiza dinheiro) não se chama Marc, mas Marianne. Desta vez, o cofrinho custava US \$ 6 quando Marianne o recebeu e ela estava economizando US \$ 3 por semana, então no final da primeira semana ela tinha US \$ 9, no final da segunda semana ela tinha US \$ 12 e assim por diante. Enquanto conversava com seus colegas sobre como calcular a economia no final da semana 10, Albert disse: "Adicionamos US\$ 3 toda semana. Então vamos fazer assim, 3 vezes 10 é 30 [mais 6] é 36. Sim, são 36."

Em um longo processo de objetivação, que sem dúvida deve continuar para refinar a consciência do modo algébrico de pensar em sequências, Albert gradualmente conseguiu reconhecer a estrutura matemática geral subjacente ao processo de salvar. Albert foi capaz de encontrar características importantes de uma maneira histórico-cultural de pensar algebricamente relacionada à sequência de salvamento, que era o assunto dessas aulas de matemática. Ele foi capaz de estender essa consciência a novas situações durante uma avaliação em toda a classe mais de uma semana após o término das aulas de álgebra.